MODULO

O Operazioni con le superfici

UNITÀ 01 Il calcolo delle aree
UNITÀ 02 La divisione delle aree
UNITÀ 03 Lo spostamento e la rettifica dei confini

Questo modulo, diviso in tre unità, tratta le problematiche che utilizzano le superfici dei terreni e che ricorrono, quindi, tutte le volte in cui una proprietà deve essere misurata e frazionata a scopo di compravendita o di successione.
Nella prima unità vengono affrontati i metodi che si utilizzano più frequentemente per misurare le aree delle superfici degli appezzamenti. La scelta del procedimento operativo dipende essenzialmente dal metodo di rilievo utilizzato. Tuttavia è opportuno impiegare, quando possibile, i metodi numerici che consentono di ottenere risultati più precisi di quelli grafici.
Nella seconda unità viene affrontata la divisione delle aree. Le problematiche sono raggruppate in relazione alla forma geometrica dei terreni da dividere e alle condizioni geometriche che deve soddisfare la dividente.
Nella terza unità vengono completati gli argomenti di agrimensura con la trattazione della rettifica e dello spostamento dei confini. Nella pratica professionale si possono presentare svariatissimi casi in rapporto alle condizioni che devono vincolare il nuovo confine. Pertanto le problematiche sono impostate attraverso la risoluzione di alcuni problemi significativi che orientino l'allievo e lo mettano in condizione di affrontare qualsiasi problema dovesse essere chiamato a risolvere.

UNITÀ

01 Il calcolo delle aree

TEORIA

1 La superficie topografica
2 Metodi numerici
3 Metodi grafici
4 Metodi meccanici
RIASSUMENDO

LABORATORIO INFORMATICO

Excel
Calcolo dell'area di una figura piana a contorno poligonale

AUTOVALUTAZIONE

La necessità di misurare rapidamente l'area di grandi superfici con confini irregolari, risale alla nascita della cartografia moderna, nel Settecento. Già in questa epoca venivano usati strumenti, detti planimetri, come quello sopra illustrato, del quale si può osservare il puntale di tracciamento e il dispositivo rotella-tamburo a tutta vista.

1. La superficie topografica

In questa unità viene affrontata quella parte di **agrimensura** che tratta dei metodi per il **calcolo delle aree** delle **superfici topografiche** dei terreni.

La **superficie topografica** di un terreno è quella definita dalla *proiezione* della superficie fisica sul *piano orizzontale* di riferimento.

Questa definizione a prima vista può essere percepita come insolita, mentre invece è indispensabile per eliminare le molteplici ambiguità che nascerebbero adottando la superficie fisica del terreno. Infatti, mentre la superficie fisica può subire nel tempo notevoli variazioni dovute all'azione dell'uomo (*spianamenti*, *sterri*, *riporti*, ecc.) o della natura (*frane*, *erosioni*, ecc.), la superficie topografica subisce variazioni solamente se vengono modificati i **confini** che delimitano l'appezzamento. Inoltre, molti dei parametri caratteristici di un terreno, quali per esempio la **produttività** e gli **indici di fabbricazione**, sono proporzionali alla sua estensione orizzontale. Sia le piante sia i fabbricati si sviluppano secondo la direzione verticale, quindi le rispettive **aree di ingombro** sono orizzontali. Infine, nel caso fosse necessario misurare la superficie fisica del terreno, si incontrerebbero notevoli difficoltà, soprattutto nelle zone molto tormentate dal punto di vista altimetrico, e si otterrebbero risultati diversi a seconda dell'operatore e del sistema di rilievo impiegato.

Il calcolo dell'area della superficie topografica di un appezzamento è reso possibile dalla misura di alcune grandezze e può essere eseguito con i seguenti metodi:

- **metodi numerici**;
- **metodi grafici**;
- **metodi meccanici**.

FAQ

Che cos'è l'agrimensura?

Quella parte della topografia che ha lo scopo di determinare le aree degli appezzamenti di terreno, la loro suddivisione in due o più parti e lo spostamento o la rettifica dei relativi confini.

2. Metodi numerici

Nel primo volume, nell'unità dedicata alla trigonometria, abbiamo dimostrato e più volte impiegato le formule più usate per determinare l'area di un triangolo, area espressa in più forme significative a seconda dei lati e angoli del triangolo assegnati.

I **metodi numerici** sono procedimenti di calcolo che utilizzano formule già note dalla **geometria** e dalla **trigonometria** e che vengono sviluppate con i dati numerici (lati, angoli, coordinate) misurati nel rilievo del contorno dell'appezzamento.

Questi metodi sono talvolta i **più laboriosi** fra tutti quelli di calcolo delle aree, tuttavia sono anche i **più precisi** in quanto risentono esclusivamente degli eventuali errori commessi nelle misurazioni effettuate sul terreno durante il rilievo.

La scelta della procedura geometrica da impiegare per calcolare l'area della superficie topografica di un appezzamento dipende essenzialmente dal tipo di rilievo effettuato in campagna per definire il contorno dell'appezzamento.

Area di un appezzamento rilevato per allineamenti e squadri

Se un appezzamento è stato rilevato per *allineamenti* e *squadri*, l'area totale viene calcolata come somma delle aree delle **figure elementari**, generalmente triangoli e trapezi, in cui gli *allineamenti principali* e gli *squadri* dividono l'appezzamento.

FAQ

Che cosa si intende per superficie topografica di un appezzamento?

La proiezione della sua superficie fisica sul piano orizzontale di riferimento.

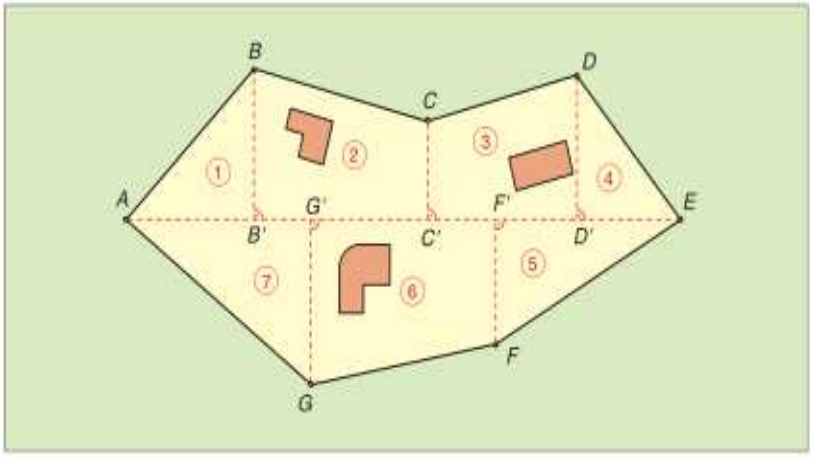


FIGURA 1 Area di un appezzamento rilevato per allineamenti e squadri. Essa viene ottenuta dalla somma delle aree delle figure elementari 1-2-3-...-7.

FAQ

▶ Per quale ragione in agrimensura non si può utilizzare la superficie fisica di un appezzamento?

Perché non se ne potrebbe determinare l'area a causa delle ondulazioni e imperfezioni che la caratterizzano. Inoltre la sua estensione varia continuamente in seguito agli interventi dell'uomo o della natura.

Nel calcolo vengono impiegate le **misure lineari** effettuate lungo gli allineamenti in fase di rilievo. Nel caso, per esempio, della ▶FIGURA 1, l'appezzamento di forma poligonale $ABCDEFG$ è stato rilevato mediante l'**allineamento principale** AE, diretto secondo la diagonale maggiore, e gli **squadri** BB', CC', DD', FF' e GG' ottenuti tracciando dai vertici le rispettive perpendicolari all'allineamento AE.

L'area totale si ottiene **sommando** quelle delle singole figure i cui elementi sono stati misurati in campagna durante il rilievo:

$$S = \frac{AB' \cdot BB'}{2} + (BB' + CC') \cdot \frac{B'C'}{2} + (CC' + DD') \cdot \frac{C'D'}{2} +$$
$$+ \frac{DD' \cdot D'E}{2} + \frac{EF' \cdot FF'}{2} + (FF' + GG') \cdot \frac{F'G'}{2} + \frac{GG' \cdot G'A}{2}$$

Area di un appezzamento rilevato per trilaterazione

Se un appezzamento è stato rilevato per **trilaterazione**, l'area totale si calcola sommando le aree dei singoli triangoli in cui è stato suddiviso l'appezzamento in fase di rilievo.

Si applica poi la formula di **Erone** impiegando in ogni triangolo le lunghezze dei suoi tre lati misurati direttamente con cordelle, aste rigide o altri distanziometri.

Nel caso, per esempio, della ▶FIGURA 2, l'appezzamento poligonale $ABCDEFG$ è stato rilevato per *trilaterazione* suddividendolo nella *maglia di triangoli* generata dai due punti arbitrari P e Q interni all'appezzamento, di ciascuno dei quali vengono misurati i tre lati. L'area di ogni triangolo viene calcolata con la formula

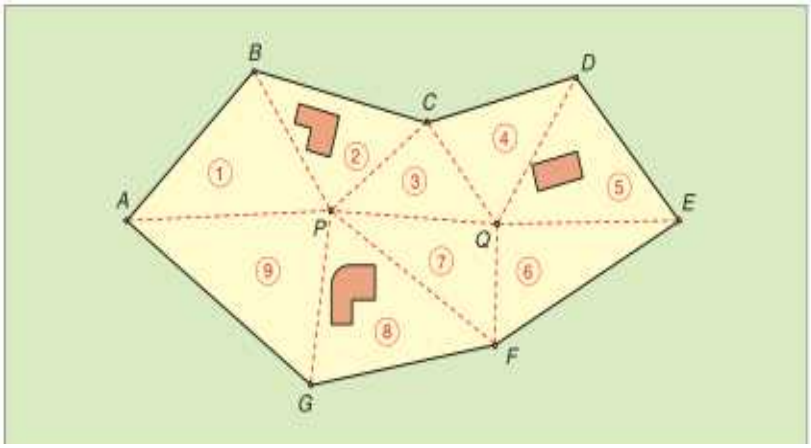


FIGURA 2 Area di un appezzamento rilevato per trilaterazione. Esso viene scomposto in triangoli dei quali vengono misurati i lati. Sommando le aree di ciascun triangolo, usando la formula di Erone, si ottiene l'area complessiva.

di Erone. La somma delle aree delle superfici triangolari esprime l'area dell'appezzamento $ABCDEF$.

Si tratta di un metodo che richiede tempo per la misura dei lati, che di solito avviene direttamente, ma affidabile e che fornisce buone precisioni.

Area di un appezzamento rilevato per coordinate cartesiane

L'impiego ormai sistematico, nella pratica professionale, degli strumenti elettronici ha reso il *rilievo per coordinate cartesiane* (o il loro calcolo in tempo reale da parte dell'elaboratore elettronico dello strumento) quello di gran lunga più utilizzato per definire la posizione dei punti di dettaglio.

Se il contorno di un appezzamento è stato rilevato per *coordinate cartesiane*, se ne può calcolare l'area mediante le **ascisse** e le **ordinate** dei vertici, i cui valori sono stati misurati in campagna o sono stati calcolati a tavolino.

Consideriamo l'appezzamento a forma quadrilatera di ▶FIGURA 3. Abbassando da ogni vertice del contorno le perpendicolari all'asse delle ascisse, vengono definiti i trapezi ABB_0A_0, BCC_0B_0, CDD_0C_0 e DAA_0D_0; indicandone con S_1, S_2, S_3 ed S_4 le rispettive aree, si vede subito che l'area S dell'appezzamento $ABCD$ è data da:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 - S_4$$

Esprimendo le aree dei trapezi in funzione delle coordinate note dei rispettivi vertici, si ottiene:

$$S = (1/2)\,(y_A + y_B)\,(x_B - x_A) + (1/2)\,(y_B + y_C)\,(x_C - x_B) + \\ + (1/2)\,(y_C + y_D)\,(x_D - x_C) - (1/2)\,(y_D + y_A)\,(x_D - x_A)$$

Quindi, cambiando di segno all'ultimo termine della sommatoria (invertendo l'ordine dell'ultimo binomio) e raccogliendo il termine comune 1/2, si ha:

$$S = (1/2)\,[(y_A + y_B)\,(x_B - x_A) + (y_B + y_C)\,(x_C - x_B) + \\ + (y_C + y_D)\,(x_D - x_C) + (y_D + y_A)\,(x_A - x_D)] \qquad (1)$$

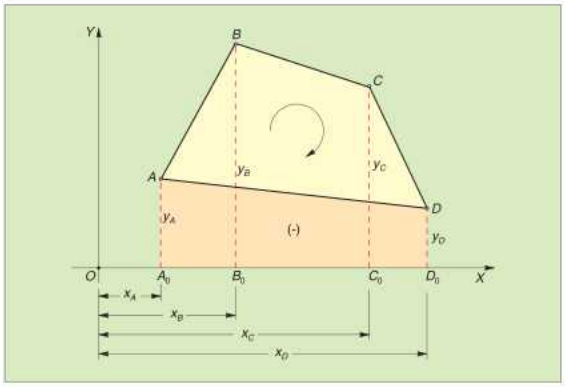


FIGURA 3 Schema geometrico relativo al calcolo dell'area di un appezzamento il cui contorno è stato rilevato per coordinate cartesiane. La procedura richiede che i vertici siano numerati in senso orario.

FAQ

▶ **Da che cosa dipende essenzialmente la scelta del metodo operativo per calcolare l'area di un appezzamento?**

Dal tipo di rilievo effettuato in campagna per definire il contorno dell'appezzamento, dalla sua configurazione e dalla precisione con la quale si vuole ottenere la misura dell'area.

La (1) consente di calcolare l'area di un appezzamento in funzione delle coordinate cartesiane dei vertici. Analizzando la formula, si può notare che il **numero dei termini** della sommatoria coincide con quello dei **vertici** dell'appezzamento. Inoltre, percorrendo il poligono in **senso orario** e considerando un vertice alla volta, ciascun termine è costituito dal **prodotto** della somma delle ordinate del vertice considerato e di quello successivo per la differenza tra le ascisse del vertice successivo e di quello considerato.

Pertanto l'espressione (1) può essere estesa e applicata al calcolo dell'area di una particella costituita da un generico numero n di vertici.

Indicando con i l'ordine del vertice generico, si ha:

$$S = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{i}(y_i + y_{i+1})(x_{i+1} - x_i) \qquad (2)$$

• Formule di Gauss

Sia la (1) che, di conseguenza, la (2) possono essere scritte in forma più semplice. Infatti, eseguendo i prodotti nel secondo membro della (1) e **semplificando** si ottiene:

$$S = (1/2)\,(x_B y_A - x_A y_B + y_B x_C - x_B y_C + y_C x_D - x_C y_D + y_D x_A - x_D y_A)$$

raccogliendo le y_i si può scrivere:

$$S = (1/2)\,[y_A(x_B - x_D) + y_B(x_C - x_A) + y_C(x_D - x_B) + y_D(x_A - x_C)] \qquad (3)$$

Generalizzando la (3), ricavata con un appezzamento di forma quadrilatera ed estendendola a un poligono costituito da n vertici, si ottiene:

$$S = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{i}y_i(x_{i+1} - x_{i-1}) \qquad (4)$$

Se nella ▶ FIGURA **3** si tracciano le perpendicolari dai vertici all'asse delle ordinate, anziché all'asse delle ascisse in luogo della (4) si ottiene facilmente la seguente:

$$S = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{i}x_i(y_{i-1} - y_{i+1}) \qquad (5)$$

La (4) e la equivalente (5) sono dette anche **formule di Gauss** e possono essere enunciate nella seguente forma:

l'area di un appezzamento a **contorno poligonale** è data dalla semisomma dei prodotti dell'ordinata (o dell'ascissa) di ciascun vertice per la differenza tra l'ascissa (o l'ordinata) del **vertice seguente** (o precedente) e l'ascissa (o l'ordinata) del **vertice precedente** (o seguente).

Nel caso in cui il perimetro dell'appezzamento venga percorso in **senso antiorario**, l'applicazione delle (2), (4), (5) fornisce un'*area negativa*, ma questo nulla toglie alla validità delle precedenti formule in quanto le *aree vengono considerate sempre positive* assumendone il valore assoluto.

FAQ

▶ Quale funzione assolvono le formule di Gauss?

Quella di fornire l'area di un poligono di cui sono note le coordinate cartesiane dei vertici, tramite la sommatoria costituita da un numero di termini uguale al numero di vertici (e di lati) del poligono.

La (1) consente di calcolare l'area di un appezzamento in funzione delle coordinate cartesiane dei vertici. Analizzando la formula, si può notare che il **numero dei termini** della sommatoria coincide con quello dei **vertici** dell'appezzamento. Inoltre, percorrendo il poligono in **senso orario** e considerando un vertice alla volta, ciascun termine è costituito dal **prodotto** della somma delle ordinate del vertice considerato e di quello successivo per la differenza tra le ascisse del vertice successivo e di quello considerato.

Pertanto l'espressione (1) può essere estesa e applicata al calcolo dell'area di una particella costituita da un generico numero n di vertici.

Indicando con i l'ordine del vertice generico, si ha:

$$S = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{i}(y_i + y_{i+1})(x_{i+1} - x_i) \qquad (2)$$

• Formule di Gauss

Sia la (1) che, di conseguenza, la (2) possono essere scritte in forma più semplice. Infatti, eseguendo i prodotti nel secondo membro della (1) e **semplificando** si ottiene:

$$S = (1/2)\,(x_B y_A - x_A y_B + y_B x_C - x_B y_C + y_C x_D - x_C y_D + y_D x_A - x_D y_A)$$

raccogliendo le y_i si può scrivere:

$$S = (1/2)\,[y_A(x_B - x_D) + y_B(x_C - x_A) + y_C(x_D - x_B) + y_D(x_A - x_C)] \qquad (3)$$

Generalizzando la (3), ricavata con un appezzamento di forma quadrilatera ed estendendola a un poligono costituito da n vertici, si ottiene:

$$S = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{i}y_i(x_{i+1} - x_{i-1}) \qquad (4)$$

Se nella ▶FIGURA 3 si tracciano le perpendicolari dai vertici all'asse delle ordinate, anziché all'asse delle ascisse in luogo della (4) si ottiene facilmente la seguente:

$$S = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{i}x_i(y_{i-1} - y_{i+1}) \qquad (5)$$

La (4) e la equivalente (5) sono dette anche **formule di Gauss** e possono essere enunciate nella seguente forma:

l'area di un appezzamento a **contorno poligonale** è data dalla semisomma dei prodotti dell'ordinata (o dell'ascissa) di ciascun vertice per la differenza tra l'ascissa (o l'ordinata) del **vertice seguente** (o precedente) e l'ascissa (o l'ordinata) del **vertice precedente** (o seguente).

Nel caso in cui il perimetro dell'appezzamento venga percorso in **senso antiorario**, l'applicazione delle (2), (4), (5) fornisce un'*area negativa*, ma questo nulla toglie alla validità delle precedenti formule in quanto le *aree vengono considerate sempre positive* assumendone il valore assoluto.

FAQ

▶ Quale funzione assolvono le formule di Gauss?

Quella di fornire l'area di un poligono di cui sono note le coordinate cartesiane dei vertici, tramite la sommatoria costituita da un numero di termini uguale al numero di vertici (e di lati) del poligono.

La (1) consente di calcolare l'area di un appezzamento in funzione delle coordinate cartesiane dei vertici. Analizzando la formula, si può notare che il **numero dei termini** della sommatoria coincide con quello dei **vertici** dell'appezzamento. Inoltre, percorrendo il poligono in **senso orario** e considerando un vertice alla volta, ciascun termine è costituito dal **prodotto** della somma delle ordinate del vertice considerato e di quello successivo per la differenza tra le ascisse del vertice successivo e di quello considerato.

Pertanto l'espressione (1) può essere estesa e applicata al calcolo dell'area di una particella costituita da un generico numero n di vertici.

Indicando con i l'ordine del vertice generico, si ha:

$$S = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{i}(y_i + y_{i+1})(x_{i+1} - x_i) \qquad (2)$$

• Formule di Gauss

Sia la (1) che, di conseguenza, la (2) possono essere scritte in forma più semplice. Infatti, eseguendo i prodotti nel secondo membro della (1) e **semplificando** si ottiene:

$$S = (1/2)\,(x_B y_A - x_A y_B + y_B x_C - x_B y_C + y_C x_D - x_C y_D + y_D x_A - x_D y_A)$$

raccogliendo le y_i si può scrivere:

$$S = (1/2)\,[y_A(x_B - x_D) + y_B(x_C - x_A) + y_C(x_D - x_B) + y_D(x_A - x_C)] \qquad (3)$$

Generalizzando la (3), ricavata con un appezzamento di forma quadrilatera ed estendendola a un poligono costituito da n vertici, si ottiene:

$$S = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{i}y_i(x_{i+1} - x_{i-1}) \qquad (4)$$

Se nella ▶FIGURA 3 si tracciano le perpendicolari dai vertici all'asse delle ordinate, anziché all'asse delle ascisse in luogo della (4) si ottiene facilmente la seguente:

$$S = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_{i}x_i(y_{i-1} - y_{i+1}) \qquad (5)$$

La (4) e la equivalente (5) sono dette anche **formule di Gauss** e possono essere enunciate nella seguente forma:

l'area di un appezzamento a **contorno poligonale** è data dalla semisomma dei prodotti dell'ordinata (o dell'ascissa) di ciascun vertice per la differenza tra l'ascissa (o l'ordinata) del **vertice seguente** (o precedente) e l'ascissa (o l'ordinata) del **vertice precedente** (o seguente).

Nel caso in cui il perimetro dell'appezzamento venga percorso in **senso antiorario**, l'applicazione delle (2), (4), (5) fornisce un'*area negativa*, ma questo nulla toglie alla validità delle precedenti formule in quanto le *aree vengono considerate sempre positive* assumendone il valore assoluto.

FAQ

▶ Quale funzione assolvono le formule di Gauss?

Quella di fornire l'area di un poligono di cui sono note le coordinate cartesiane dei vertici, tramite la sommatoria costituita da un numero di termini uguale al numero di vertici (e di lati) del poligono.

Al fine di evitare errori banali ma frequenti, va ricordato che i valori numerici delle coordinate vanno sempre considerati con i loro **segni algebrici**.

Le formule di Gauss sono particolarmente adatte a essere automatizzate in un *programma di calcolo*, e si coniugano bene con le moderne tecniche di rilievo come GPS e celerimensura con le *stazioni totali*.

In effetti (v. modulo G), le stazioni totali sono implementate con appositi software applicativi che impiegano queste formule per calcolare automaticamente in campagna le aree degli appezzamenti rilevati.

Area di un appezzamento rilevato per coordinate polari

Se il contorno di un appezzamento è stato rilevato per **coordinate polari**, se ne può calcolare l'area mediante i valori numerici, misurati in campagna, delle **distanze polari** e degli **angoli di direzione** (azimut) relativi ai vertici del confine.

Consideriamo l'appezzamento di forma quadrilatera di ▶FIGURA 4. Indichiamo con OY la direzione dell'asse polare e con d_A, d_B, d_C, d_D e ϑ_A, ϑ_B, ϑ_C, ϑ_D i valori misurati rispettivamente delle **distanze polari** e degli **angoli di direzione** relativi ai vertici A, B, C e D. È evidente che l'area dell'appezzamento è data dalla somma algebrica delle aree dei triangoli con vertice in O:

$$S = S_{OAB} + S_{OBC} - S_{OCD} - S_{ODA}$$

Sostituendo alle aree dei triangoli la loro espressione in funzione delle coordinate polari dei rispettivi vertici, si ottiene:

$$S = (1/2)\, d_A d_B \operatorname{sen}(\vartheta_B - \vartheta_A) + (1/2)\, d_B d_C \operatorname{sen}(\vartheta_C - \vartheta_B) + \\ - (1/2)\, d_C d_D \operatorname{sen}(\vartheta_C - \vartheta_D) - (1/2)\, d_D d_A \operatorname{sen}(\vartheta_D - \vartheta_A)$$

Raccogliendo il termine comune 1/2 e cambiando di segno ai due termini finali dell'espressione precedente (invertendo l'ordine della differenza di azimut), si ottiene:

$$S = (1/2)\, [d_A d_B \operatorname{sen}(\vartheta_B - \vartheta_A) + d_B d_C \operatorname{sen}(\vartheta_C - \vartheta_B) + \\ + d_C d_D \operatorname{sen}(\vartheta_D - \vartheta_C) + d_D d_A \operatorname{sen}(\vartheta_A - \vartheta_D)] \qquad (6)$$

FAQ

▶ **È possibile ottenere l'area di una particella per coordinate polari relative a un punto interno alla stessa particella?**

Sì, in questo caso i termini della sommatoria che fornisce l'area sono tutti positivi.

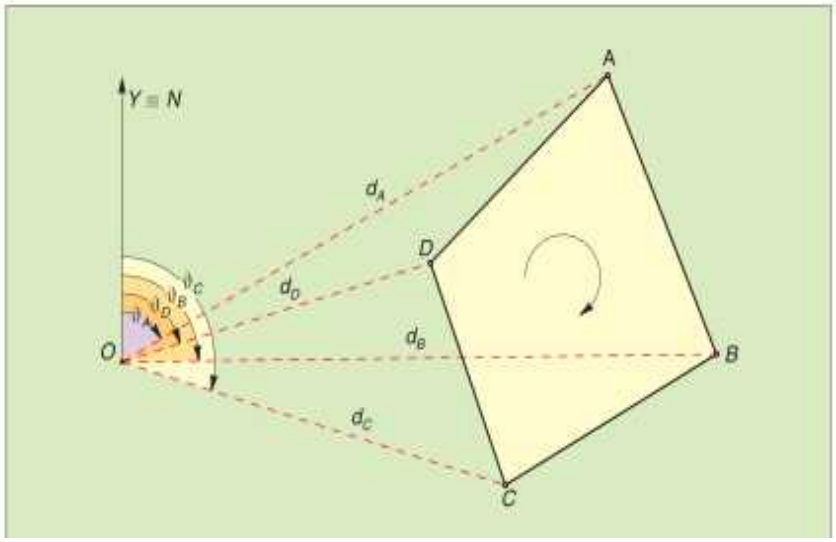


FIGURA 4 Schema geometrico relativo al calcolo dell'area di un appezzamento il cui contorno è stato rilevato per coordinate polari. Il polo O può essere esterno, oppure interno, alla particella senza

La (6) può essere estesa a un appezzamento costituito da un qualsiasi numero n di vertici. Immaginando di percorrere il perimetro dell'appezzamento in **senso orario** e indicando con i l'ordine del generico vertice, si ottiene la formula generale:

$$S = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_i d_i \cdot d_{i+1} \cdot \text{sen}\,(\vartheta_{i+1} - \vartheta_i) \qquad (7)$$

L'area di un appezzamento di cui sono note le **coordinate polari** dei vertici del contorno, immaginando di percorrerne il perimetro in senso orario, è data dalla semisomma dei prodotti delle distanze polari di tutte le coppie di vertici consecutivi per il seno della differenza tra gli angoli di direzione del vertice successivo e del vertice precedente.

Il segno di ogni termine della precedente espressione è determinato dal segno di sen $(\vartheta_{i+1} - \vartheta_i)$. La (7) vale anche quando un appezzamento è stato rilevato da un **punto interno**; in questo caso tutti i termini della sommatoria sono sempre di segno positivo.

APPLICAZIONE

Problema *Il contorno esagonale ABCDEF è stato rilevato per irraggiamento da un punto O esterno a esso (▶FIGURA 5). Per il rilievo è stata usata una stazione totale. Calcolare l'area dell'appezzamento.*

Soluzione

Le osservazioni sono state raccolte nel libretto delle misure riportato sotto, a cui è stato aggiunto, per comodità di calcolo, il registro di restituzione.

Libretto delle misure					Registro di restituzione			
Staz.	Vertici	Dist. polari (m)	Cerchi (cent.) orizz.	Cerchi (cent.) vert.	$d_i \cdot d_{i+1}$	$\vartheta_{i+1} - \vartheta_i$	Doppie aree +	Doppie aree −
O	A	89,80	54^c,78	99^c,76	10638,61	10^c,84	1802,74	–
	B	118,47	65^c,62	99^c,06	12294,82	20^c,63	3914,84	–
	C	103,78	86^c,25	100^c,85	12930,99	8^c,43	1707,17	–
	D	124,60	94^c,68	101^c,78	12157,22	25^c,69	4773,83	–
	E	97,57	120^c,37	101^c,03	4637,50	−41^c,96	–	2840,05
	F	47,53	78^c,41	102^c,47	4268,19	−23^c,63	–	1548,13
	A	89,80	54^c,78	–			12198,58	4388,18

$2S = 7810{,}40\ m^2$
L'area, quindi, sarà: $S = 3905{,}20\ m^2$.

Area di un appezzamento rilevato per camminamento

Se il contorno di una particella è stato rilevato per **camminamento** percorrendone il perimetro se ne può calcolare l'area utilizzando le lunghezze dei lati meno uno, e gli angoli tra essi compresi, misurati in campagna.

Consideriamo il contorno di forma quadrilatera di ▶FIGURA 6 rilevato attraverso la

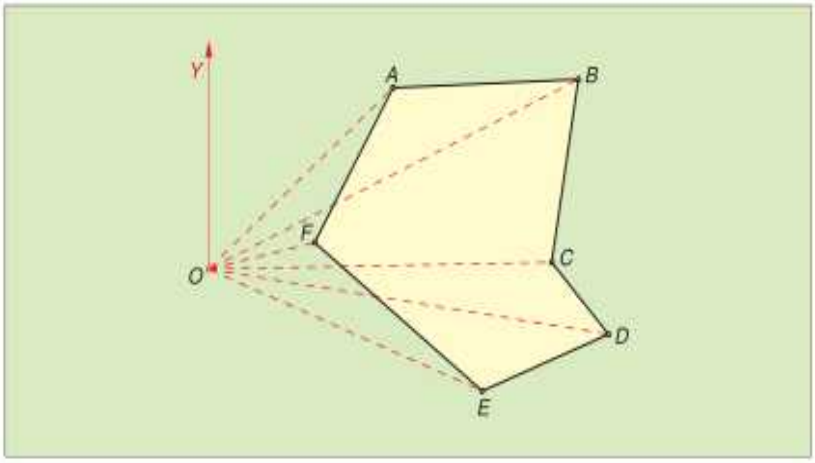


FIGURA 5 Schema geometrico relativo al calcolo dell'area di un poligono con contorno rilevato per coordinate polari dal punto esterno O.

meno uno, e gli angoli compresi). Prolungando i lati AB e DC fino a incontrarsi nel punto P, si può osservare che:

$$S = S_{APD} - S_{BPC}$$

Indicando con ω l'angolo in P, si ha:

$$S = (1/2)\,(AP \cdot PD \operatorname{sen} \omega - BP \cdot PC \operatorname{sen} \omega)$$

quindi:

$$S = (1/2)\,(AP \cdot PD - BP \cdot PC) \cdot \operatorname{sen} \omega$$

Considerando che $AP = a + BP$ e $PD = c + PC$, la precedente si può scrivere:

$$S = (1/2)\,[(a + BP)\,(c + PC) - BP \cdot PC] \cdot \operatorname{sen} \omega$$

Effettuando i prodotti e semplificando, si ha:

$$S = (1/2)\,(a \cdot c + a \cdot PC + BP \cdot c) \cdot \operatorname{sen} \omega$$

Considerando che $PC = b \cdot \operatorname{sen} \alpha / \operatorname{sen} \omega$ e che $PB = b \cdot \operatorname{sen} \beta / \operatorname{sen} \omega$, dopo aver sostituito e semplificato, si può scrivere:

$$S = (1/2)\,(a \cdot c \cdot \operatorname{sen} \omega + a \cdot b \cdot \operatorname{sen} \alpha + c \cdot b \cdot \operatorname{sen} \beta)$$

FAQ

► La formula di camminamento è applicabile solo alle figure a contorno quadrilatero?

No, con essa è possibile conoscere l'area di una qualunque figura piana a contorno poligonale di cui siano noti tutti i lati meno uno e i relativi angoli compresi.

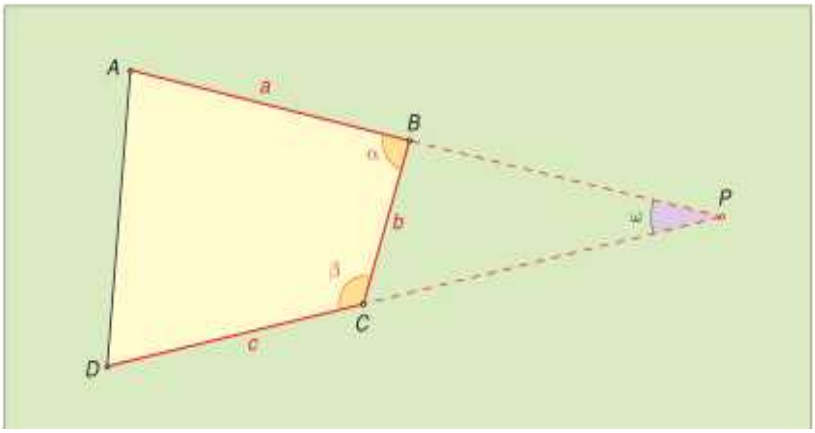


FIGURA 6 Schema geometrico relativo al calcolo dell'area di un quadrilatero il cui contorno è stato rilevato per camminamento misurando tutti i lati, meno uno, e gli angoli tra essi compresi.

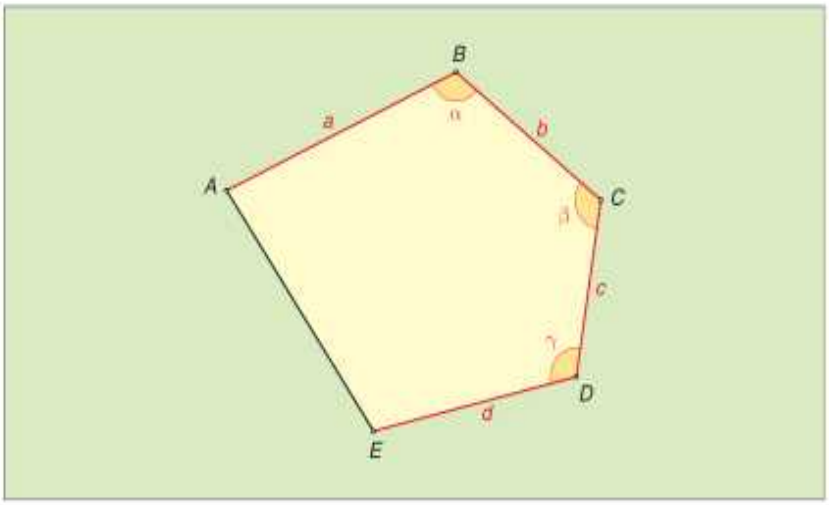


FIGURA 7 Schema geometrico relativo al calcolo dell'area di un poligono il cui contorno è stato rilevato per camminamento misurando tutti gli elementi tranne un lato e i due angoli adiacenti.

Infine, tenendo presente che:

$$\text{sen}\,\omega = \text{sen}\,[(180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta)] = \text{sen}\,[360^\circ - (\alpha + \beta)] = -\text{sen}\,(\alpha + \beta)$$

si ottiene:

$$S = (1/2)\,[a \cdot b \cdot \text{sen}\,\alpha + b \cdot c \cdot \text{sen}\,\beta - a \cdot c \cdot \text{sen}\,(\alpha + \beta)] \qquad (8)$$

La (8) può essere estesa a un appezzamento con un numero qualunque di vertici purché siano noti tutti i suoi elementi tranne un lato e i due angoli adiacenti.

L'area di un appezzamento il cui contorno è stato rilevato per **camminamento** è data dalla semisomma di tutti i possibili prodotti dei lati presi a due a due (combinazioni), per il seno della somma degli angoli che si incontrano per andare dall'uno all'altro, con il segno positivo o negativo a seconda che il numero degli angoli incontrati sia dispari o pari.

Nel caso della ▶FIGURA 7, la forma della superficie è pentagonale e l'espressione dell'area in funzione di tutti gli elementi tranne un lato e i due angoli adiacenti è la seguente:

$$S = (1/2)\,[a \cdot b \cdot \text{sen}\,\alpha - a \cdot c \cdot \text{sen}\,(\alpha + \beta) + a \cdot d \cdot \text{sen}\,(\alpha + \beta + \gamma) + b \cdot c \cdot \text{sen}\,\beta - b \cdot d \cdot \text{sen}\,(\beta + \gamma) + c \cdot d \cdot \text{sen}\,\gamma] \qquad (9)$$

3. Metodi grafici

L'utilizzo sempre più esteso dei sistemi di disegno computerizzato ha praticamente azzerato la necessità di valersi dei **metodi grafici** per calcolare le aree degli appezzamenti. Ormai questi metodi vengono impiegati unicamente quando di un appezzamento si dispone soltanto del disegno su carta, come nel caso delle *particelle catastali*, o quando si deve *integrare graficamente* il diagramma delle aree per ricavare il profilo di Brückner nell'ambito del progetto di una *strada*. Tuttavia, i metodi grafici conservano anche un'eleganza formale nel risolvere il problema del calcolo delle aree, che ne rende utile l'esame nel contesto

FAQ

▶ I metodi grafici per il calcolo dell'area delle figure piane sono precisi?

No, in quanto essi risentono delle imprecisioni proprie della connessa costruzione grafica, oltre che della approssimazione legata alla misura della lunghez-

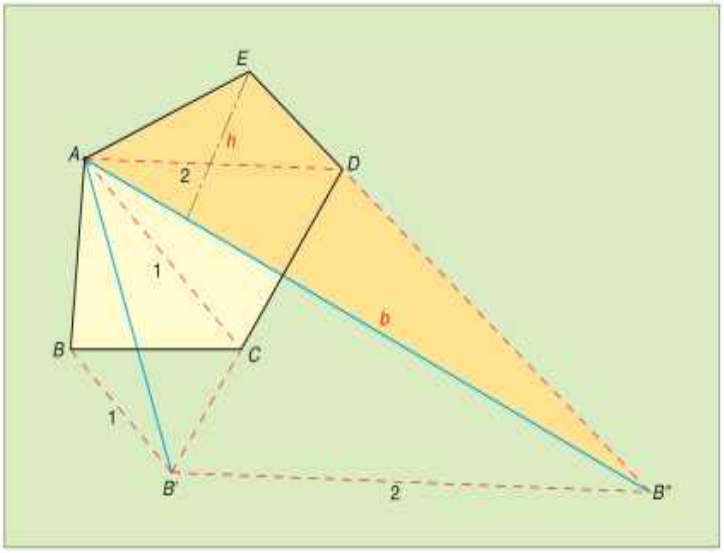


FIGURA 8 Trasformazione grafica di un poligono in un triangolo equivalente con un vertice fisso. L'area viene calcolata misurando b e h sul disegno.

I metodi grafici consistono nel **trasformare**, con opportuni procedimenti grafici, la rappresentazione di un appezzamento di forma **poligonale** disegnato in scala, in un **triangolo** o in un **rettangolo equivalenti** e nel calcolarne poi l'area mediante la base e l'altezza misurate sul grafico.

FAQ

▶ **Quale principio accomuna tutti i metodi grafici?**

Quello di sostituire alla figura di cui si ricerca l'area, una figura equivalente ma di forma semplice (triangoli o rettangoli).

Questi metodi sono **rapidi**, ma **poco precisi** per le inevitabili approssimazioni che si commettono sia nella *trasformazione grafica* sia nella *misura* delle grandezze direttamente sul disegno, anche se il numero di queste ultime viene ridotto al minimo.

Trasformazione di un poligono in un triangolo equivalente

• Metodo del vertice fisso

Consiste nel trasformare la rappresentazione di un appezzamento, per esempio quello pentagonale $ABCDE$ di ▶FIGURA 8, in modo che un suo vertice, per esempio A, sia uno di quelli che definiscono il **triangolo equivalente** al poligono.

Si traccia dal vertice B la parallela alla diagonale AC fino a incontrare in B' il prolungamento del lato CD. Congiungendo A con B', viene definito il quadrilatero $AB'DE$ che è equivalente al poligono dato $ABCDE$. Infatti al pentagono è stato tolto il triangolo ABC ed è stato aggiunto il triangolo $AB'C$. Questi due triangoli sono **equivalenti** per avere la stessa base AC e la medesima altezza, rappresentata dalla distanza tra le due rette AC e BB', **parallele** per costruzione. Pertanto il pentagono dato è stato trasformato in un *quadrilatero equivalente*.

Analogamente si trasforma il quadrilatero $AB'DE$ nel triangolo equivalente $AB''E$. Si traccia dal vertice B' la parallela alla diagonale AD fino a incontrare in B'' il prolungamento del lato ED. Congiungendo A con B'', viene definito il triangolo $AB''E$ che è equivalente al quadrilatero $AB'DE$. Infatti al quadrilatero è stato tolto il triangolo $AB'D$ ed è stato aggiunto il triangolo $AB''D$. Questi due triangoli sono equivalenti per avere la stessa base AD e la medesima altezza, rappresentata dalla distanza tra le due rette AD e $B'B''$, parallele per costruzione.

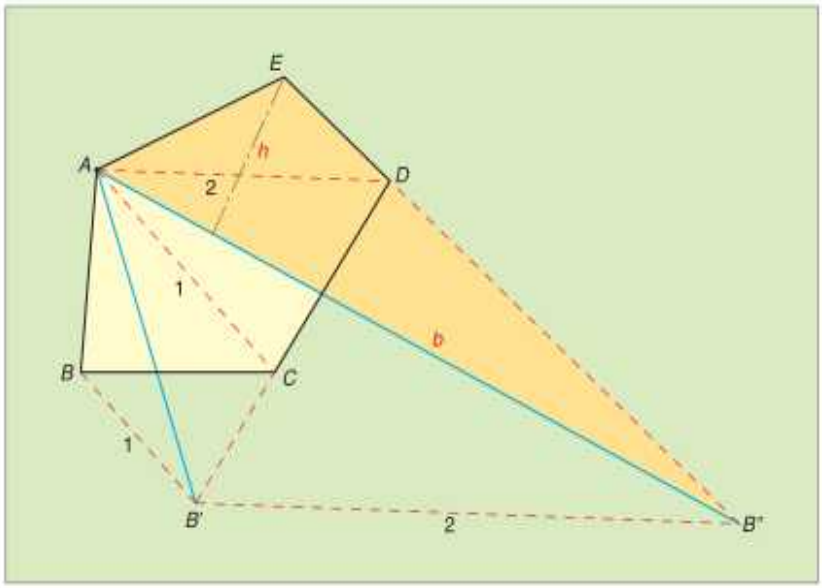


FIGURA 8 Trasformazione grafica di un poligono in un triangolo equivalente con un vertice fisso. L'area viene calcolata misurando b e h sul disegno.

I metodi grafici consistono nel **trasformare**, con opportuni procedimenti grafici, la rappresentazione di un appezzamento di forma **poligonale** disegnato in scala, in un **triangolo** o in un **rettangolo equivalenti** e nel calcolarne poi l'area mediante la base e l'altezza misurate sul grafico.

FAQ

▶ **Quale principio accomuna tutti i metodi grafici?**

Quello di sostituire alla figura di cui si ricerca l'area, una figura equivalente ma di forma semplice (triangoli o rettangoli).

Questi metodi sono **rapidi**, ma **poco precisi** per le inevitabili approssimazioni che si commettono sia nella *trasformazione grafica* sia nella *misura* delle grandezze direttamente sul disegno, anche se il numero di queste ultime viene ridotto al minimo.

Trasformazione di un poligono in un triangolo equivalente

• Metodo del vertice fisso

Consiste nel trasformare la rappresentazione di un appezzamento, per esempio quello pentagonale $ABCDE$ di ▶FIGURA 8, in modo che un suo vertice, per esempio A, sia uno di quelli che definiscono il **triangolo equivalente** al poligono.

Si traccia dal vertice B la parallela alla diagonale AC fino a incontrare in B' il prolungamento del lato CD. Congiungendo A con B', viene definito il quadrilatero $AB'DE$ che è equivalente al poligono dato $ABCDE$. Infatti al pentagono è stato tolto il triangolo ABC ed è stato aggiunto il triangolo $AB'C$. Questi due triangoli sono **equivalenti** per avere la stessa base AC e la medesima altezza, rappresentata dalla distanza tra le due rette AC e BB', **parallele** per costruzione. Pertanto il pentagono dato è stato trasformato in un *quadrilatero equivalente*.

Analogamente si trasforma il quadrilatero $AB'DE$ nel triangolo equivalente $AB''E$. Si traccia dal vertice B' la parallela alla diagonale AD fino a incontrare in B'' il prolungamento del lato ED. Congiungendo A con B'', viene definito il triangolo $AB''E$ che è equivalente al quadrilatero $AB'DE$. Infatti al quadrilatero è stato tolto il triangolo $AB'D$ ed è stato aggiunto il triangolo $AB''D$. Questi due triangoli sono equivalenti per avere la stessa base AD e la medesima altezza, rappresentata dalla distanza tra le due rette AD e $B'B''$, parallele per costruzione.

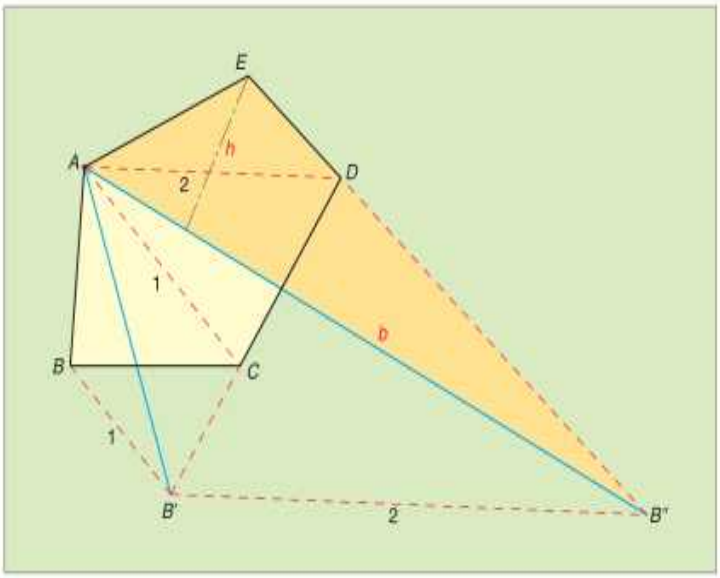


FIGURA 8 Trasformazione grafica di un poligono in un triangolo equivalente con un vertice fisso. L'area viene calcolata misurando b e h sul disegno.

I metodi grafici consistono nel **trasformare**, con opportuni procedimenti grafici, la rappresentazione di un appezzamento di forma **poligonale** disegnato in scala, in un **triangolo** o in un **rettangolo equivalenti** e nel calcolarne poi l'area mediante la base e l'altezza misurate sul grafico.

FAQ

▶ **Quale principio accomuna tutti i metodi grafici?**

Quello di sostituire alla figura di cui si ricerca l'area, una figura equivalente ma di forma semplice (triangoli o rettangoli).

Questi metodi sono **rapidi**, ma **poco precisi** per le inevitabili approssimazioni che si commettono sia nella *trasformazione grafica* sia nella *misura* delle grandezze direttamente sul disegno, anche se il numero di queste ultime viene ridotto al minimo.

Trasformazione di un poligono in un triangolo equivalente

• Metodo del vertice fisso

Consiste nel trasformare la rappresentazione di un appezzamento, per esempio quello pentagonale $ABCDE$ di ▶FIGURA 8, in modo che un suo vertice, per esempio A, sia uno di quelli che definiscono il **triangolo equivalente** al poligono.

Si traccia dal vertice B la parallela alla diagonale AC fino a incontrare in B' il prolungamento del lato CD. Congiungendo A con B', viene definito il quadrilatero $AB'DE$ che è equivalente al poligono dato $ABCDE$. Infatti al pentagono è stato tolto il triangolo ABC ed è stato aggiunto il triangolo $AB'C$. Questi due triangoli sono **equivalenti** per avere la stessa base AC e la medesima altezza, rappresentata dalla distanza tra le due rette AC e BB', **parallele** per costruzione. Pertanto il pentagono dato è stato trasformato in un *quadrilatero equivalente*.

Analogamente si trasforma il quadrilatero $AB'DE$ nel triangolo equivalente $AB''E$. Si traccia dal vertice B' la parallela alla diagonale AD fino a incontrare in B'' il prolungamento del lato ED. Congiungendo A con B'', viene definito il triangolo $AB''E$ che è equivalente al quadrilatero $AB'DE$. Infatti al quadrilatero è stato tolto il triangolo $AB'D$ ed è stato aggiunto il triangolo $AB''D$. Questi due triangoli sono equivalenti per avere la stessa base AD e la medesima altezza, rappresentata dalla distanza tra le due rette AD e $B'B''$, parallele per costruzione.

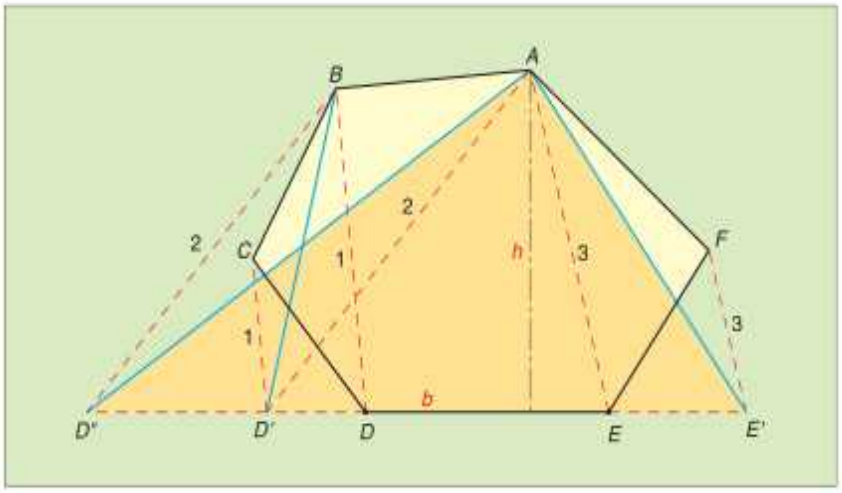


FIGURA 9 Trasformazione grafica di un poligono in un triangolo equivalente con un lato fisso. L'area viene calcolata misurando graficamente un lato e la relativa altezza.

Per calcolare l'area dell'appezzamento pentagonale $ABCDE$, basta determinare quella del **triangolo equivalente** $AB''E$ misurandone graficamente un lato qualunque, per esempio AB'', e la relativa altezza. Conoscendo la scala del disegno si possono avere le misure reali espresse in metri così da calcolare l'area in m^2.

• Metodo del lato fisso

Consiste nel trasformare la rappresentazione di un appezzamento, per esempio quello esagonale $ABCDEF$ di ▶FIGURA 9, in modo che un suo lato, per esempio DE, si trovi sopra uno dei lati del **triangolo equivalente** al poligono.

Per comprendere la costruzione occorre tenere presente quanto è stato detto nel problema precedente.

Si traccia dal vertice C la parallela alla diagonale BD fino a incontrare in D' il prolungamento del lato DE. Si congiunge B con D' in modo da sostituire il triangolo BCD con quello equivalente BDD'. L'esagono $ABCDEF$ è stato così trasformato nel pentagono equivalente $ABD'EF$. Quindi si traccia da B la parallela ad AD' fino a incontrare in D'' il prolungamento del lato DE. Si congiungono i punti A e D'' sostituendo così al triangolo ABD' quello equivalente $AD'D''$. Il pentagono $ABD'EF$ è stato così trasformato nel quadrilatero equivalente $AD''EF$. Infine si traccia dal vertice F la parallela alla diagonale AE fino a incontrare nel punto E' il prolungamento del lato DE. Congiungendo i punti A ed E' si sostituisce al triangolo AEF *quello equivalente* AEE', in modo che il quadrilatero $AD''EF$ e il triangolo $AD''E'$ risultano equivalenti.

Per calcolare l'area dell'appezzamento esagonale $ABCDEF$ basta determinare quella del triangolo equivalente $AD''E'$, come visto in precedenza.

■ Trasformazione di un trapezio in un rettangolo equivalente di base data

Consideriamo il trapezio $ABCD$ di ▶FIGURA 10 che deve essere trasformato nel rettangolo equivalente di **base assegnata** $OE = b$.

Si traccia la base media MN del trapezio e si proietta il punto M in M' sulla verticale condotta dall'estremo E della base. Si traccia dal vertice A la parallela a OM' fino a incontrare in H la base BC del trapezio. Il segmento $BH = h$ è l'altezza cercata in quanto il rettangolo di base b e altezza h è equivalente al trapezio $ABCD$. Infatti dalla similitudine dei triangoli ABH e OEM' possiamo scrivere:

$$b : EM' = AB : h$$

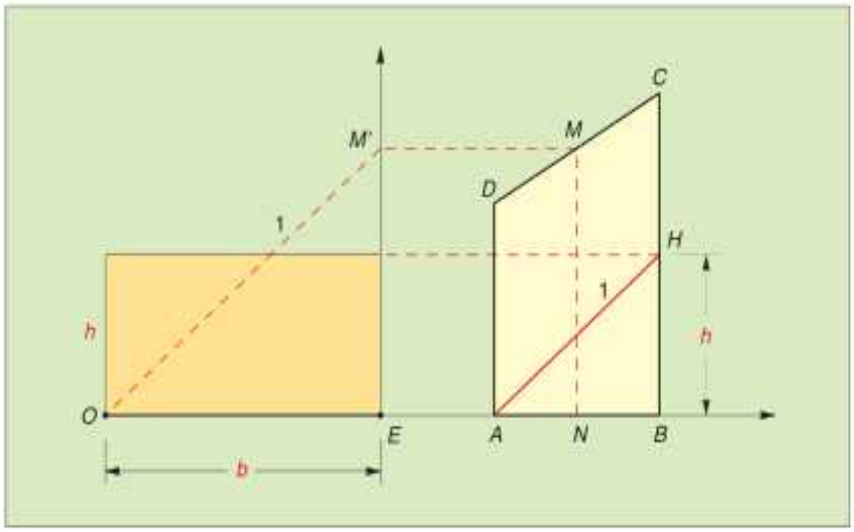


FIGURA 10 Trasformazione di un trapezio in un rettangolo equivalente di base b. Questa viene scelta arbitrariamente dall'operatore.

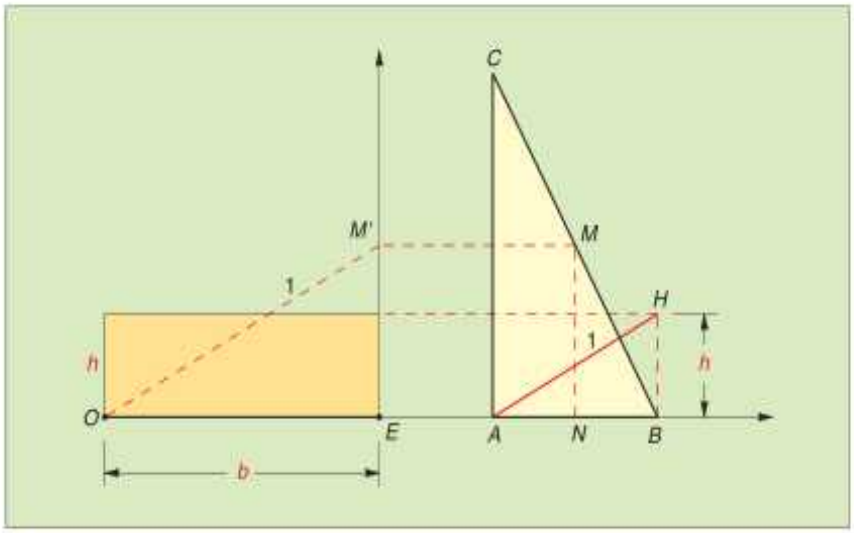


FIGURA 11 Trasformazione di un triangolo in un rettangolo equivalente di base b.

da cui:

$$b \cdot h = EM' \cdot AB \tag{10}$$

Il segmento EM' è uguale a MN e quindi rappresenta la media delle basi del trapezio. Pertanto il secondo membro della (10) è l'espressione dell'area del trapezio $ABCD$. Poiché il primo membro rappresenta l'area del rettangolo di base b e altezza h, risulta dimostrata l'equivalenza del trapezio e del rettangolo.

La costruzione resta sostanzialmente immutata se si riduce a un rettangolo equivalente un triangolo rettangolo anziché un trapezio. In questo caso basta che una delle basi, AD o BC della ▶FIGURA 10, sia nulla. Nella ▶FIGURA 11 abbiamo trasformato il triangolo rettangolo ABC nel rettangolo equivalente di base assegnata b.

Integrazione grafica

Si definisce **integrazione grafica** il procedimento operativo mediante il quale un poligono viene trasformato in un **rettangolo equivalente** di base assegnata.

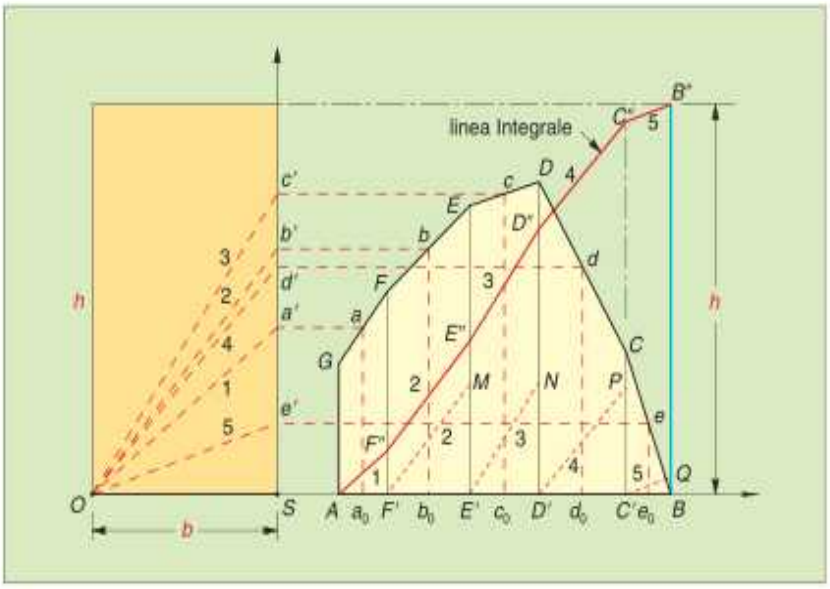


FIGURA 12 Determinazione di un'area con il metodo dell'integrazione grafica. La linea $AF''E''D''C''B''$ è detta linea integrale. Una sua ordinata, moltiplicata per b, rappresenta l'area della figura che rimane alla sinistra della stessa ordinata.

Consideriamo il poligono $ABCDEFG$ di ▶FIGURA 12 che deve essere trasformato nel rettangolo di base assegnata $OS = b$ detta **base di integrazione**.

Si tracciano le ordinate FF', EE', DD', CC' in modo che il poligono venga diviso in trapezi. L'ultima figura è un triangolo rettangolo che si assimila a un trapezio con una base nulla. Applicando il procedimento esposto in precedenza, si trasforma il primo trapezio $AF'FG$ in un rettangolo equivalente di **base** b, mentre l'altezza del rettangolo è rappresentata dal segmento $F'F''$. Quindi si trasforma il secondo trapezio $F'E'EF$ nel rettangolo equivalente di **base** b e l'altezza corrispondente è il segmento $E'M$. Tirando da F'' la parallela a $F'M$ si taglia in E'' l'ordinata EE': il segmento $E'E''$ rappresenta l'altezza del rettangolo di base b equivalente alla **somma dei primi due trapezi**. Alla stessa maniera si determina l'altezza $D'N$ del rettangolo di base b equivalente al terzo trapezio $E'D'DE$. Tracciando da E'' la parallela $E''D''$ a $E'N$ si ottiene il segmento $D'D''$ che rappresenta l'altezza del rettangolo di base b equivalente alla somma dei primi tre trapezi. Così procedendo, si otterrà infine il segmento $BB'' = h$ che rappresenta l'**altezza** del rettangolo di **base** b equivalente alla somma di tutti i trapezi che costituiscono il poligono dato $ABCDEFG$.

L'**integrazione grafica** è particolarmente indicata per trasformare in un rettangolo equivalente una figura con contorno in parte o tutto curvilineo come nella ▶FIGURA 13*a*. In questo caso si divide il contorno curvilineo in tratti tanto piccoli da ritenersi rettilinei. Dai punti di divisione si abbassano le ordinate e si scompone così la figura in trapezi. Quindi si procede come nel caso precedente.

• Integrazione grafica con differenza di aree

Supponiamo di dover integrare graficamente il poligono $ABCDEFGHI$ di ▶FIGURA 13*b*. Anzitutto si divide in trapezi abbassando da tutti i vertici le ordinate AA_0, BB_0, CC_0, ecc. Quindi si fa l'integrazione grafica del poligono $A_0AIHGFEE_0$ ottenendo l'altezza h_1, così che il rettangolo di base b e altezza h_1 diventa equivalente al poligono sopra indicato. Infine si effettua l'integrazione grafica del poligono $A_0ABCDEE_0$ e si ottiene l'altezza h_2. Indicando con S_1 l'area del primo poligono, con S_2 l'area del secondo e con S l'area del poligono $ABCDEFGHI$, possiamo scrivere:

$$S = S_1 - S_2 = b \cdot h_1 - b \cdot h_2 = b\,(h_1 - h_2) = b \cdot h$$

La differenza $h_1 - h_2 = h$ ci dà l'altezza del rettangolo di base b equivalente al

FAQ

▶ **Che cosa consente di determinare la linea integrale di un'integrazione grafica?**

Moltiplicando l'ordinata di un suo vertice per la base di integrazione si ottiene l'area della figura che rimane alla sinistra della stessa ordinata.

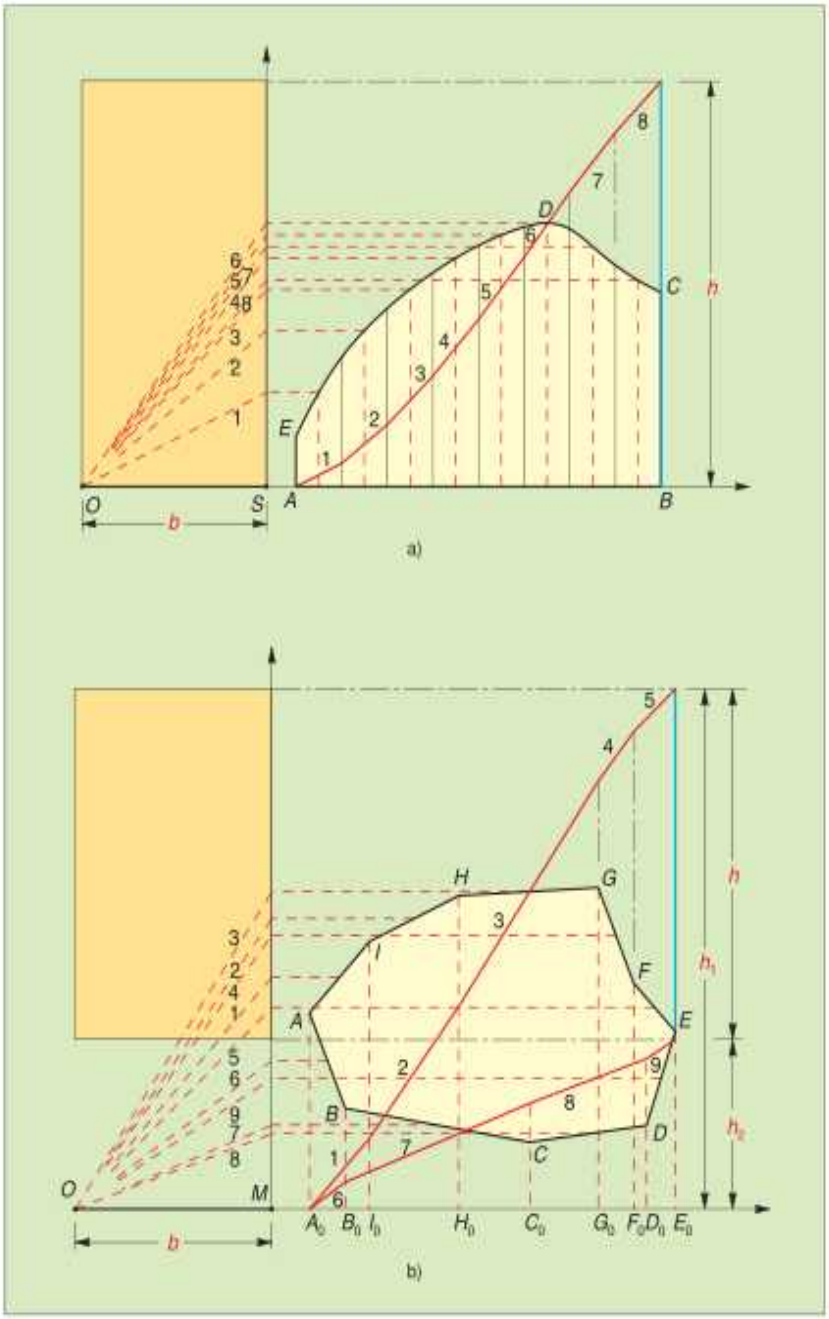


FIGURA 13 Integrazione grafica di una figura con contorno in parte curvilineo (*a*) e integrazione grafica di una figura chiusa con differenza di aree (*b*).

4. Metodi meccanici

Quando una superficie è definita da un *contorno curvilineo* può essere conveniente misurarne l'area con i **metodi meccanici**, soprattutto con quelli che prevedono l'impiego di particolari strumenti (**planimetri**) che vengono utilizzati seguendo il contorno dell'appezzamento con una apposita parte dello strumento stesso, chiamata *puntatore*.

I metodi meccanici, dunque, consentono di misurare l'area grafica di un appezzamento operando con speciali **strumenti**, detti **planimetri**, e secondo particolari criteri, sulla sua **rappresentazione grafica** redatta in scala (**mappa**).

FAQ

▶ Con i planimetri vengono misurate le aree reali degli appezzamenti?

No, assolutamente, i planimetri misurano l'area grafica sulla mappa che contiene la rappresentazione dell'appezzamento.

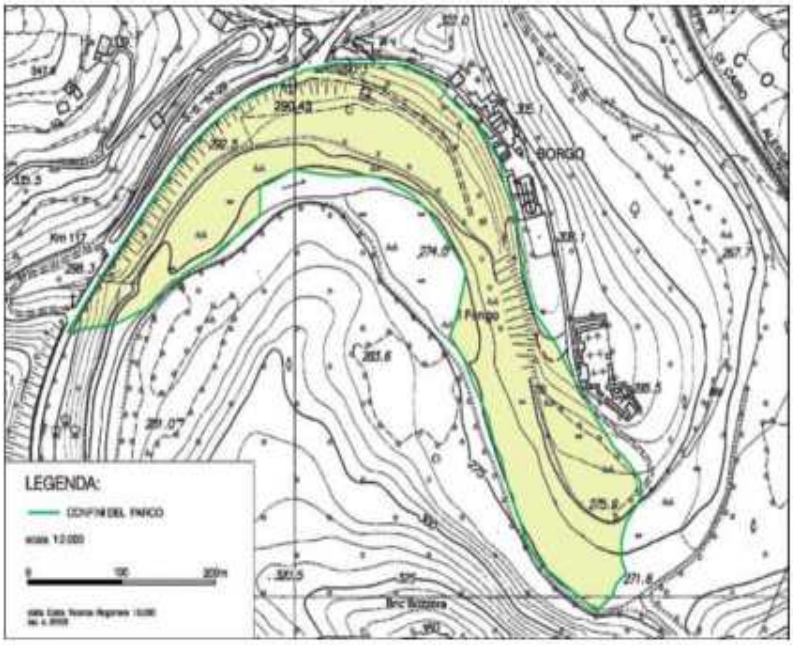


FIGURA 14 Estratto di mappa alla scala 1:2000 nella quale sono stati evidenziati in verde i confini di un parco del quale verrà misurata l'area con il planimetro.

Per esempio, i metodi meccanici possono essere impiegati per misurare le aree grafiche di porzioni di territorio individuate sulla cartografia di base, come illustrato in ▶FIGURA 14.

Questi ultimi metodi sono molto **rapidi** ma, naturalmente, non molto **precisi**. Infatti, oltre a essere influenzati dagli errori elencati per tutti gli altri metodi, risentono anche di eventuali imperfezioni strumentali.

Planimetro polare meccanico di Amsler

Questo strumento è schematicamente costituito dalle due aste metalliche *EF* e *CP*, collegate a cerniera nel punto *C* (▶FIGURA 15).

L'asta *EF* è detta **asta tracciante** e all'estremo *F* porta il **puntatore** o *segnatoio*, costituito da una lente d'ingrandimento con inciso un punto o una crocetta che permette di esplorare il percorso del perimetro dell'appezzamento da planimetrare. L'asta *CP* è detta **braccio polare** e il punto *P* **polo**. Il *polo* viene alloggiato in un foro praticato su un disco zavorrato, recante generalmente tre puntine nella parte inferiore. In questo modo il polo non subisce spostamenti in fase operativa. All'estremo *E* è applicata una **rotella** scorrevolissima e portante un **tamburo** divi-

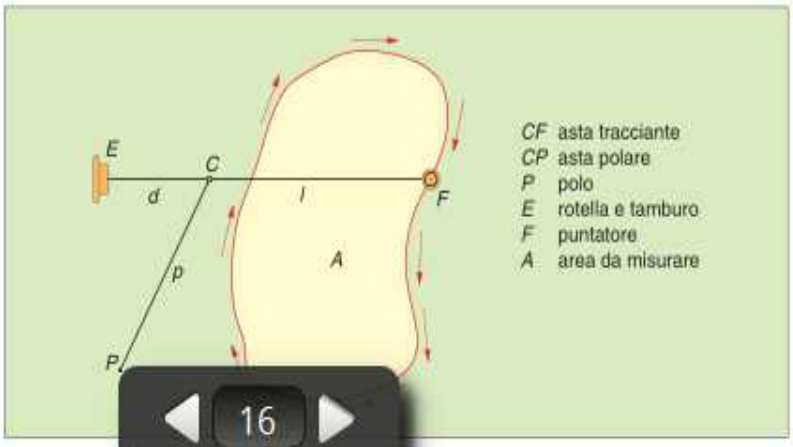


FIGURA 15 Schema del planimetro polare di Amsler. Durante la misura il polo *P* rimane fisso, mentre il puntatore *F* esplora il contorno della figura.

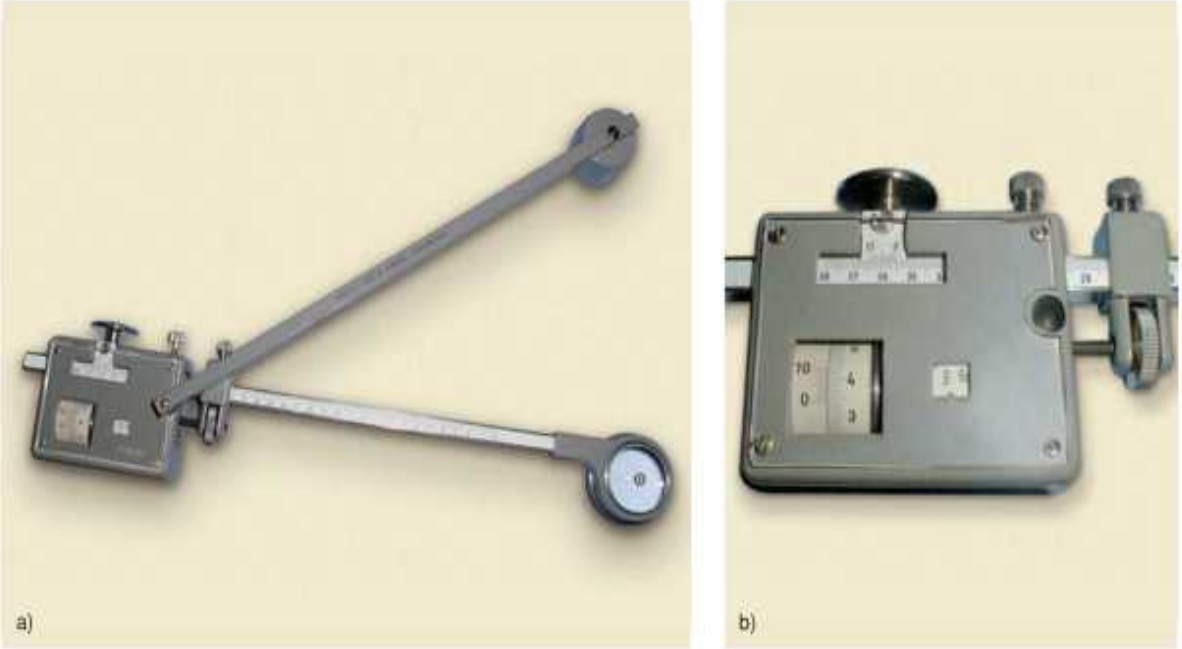


FIGURA 16 Planimetro polare di Amsler (*a*) e particolare della scatola porta rotella con in primo piano il tamburo e il nonio di lettura (*b*).

so in cento parti di graduazione. Al bordo del tamburo è applicato un **nonio** che permette di apprezzare il decimo della parte di rotella: ne consegue che l'unità di graduazione si spinge al millesimo di giro della rotella. Lo strumento è dotato anche di un dispositivo per riportare a zero la lettura iniziale e di un *disco contagiri* nel quale si possono leggere fino a 10 giri completi della rotella. Nella ▶FIGURA 16 è illustrato un planimetro polare.

Il **planimetro polare** può essere usato con il polo fisso in posizione esterna alla figura (a *polo esterno*), quando si devono planimetrare piccole aree, o in posizione interna (a *polo interno*) per le grandi aree. Nel primo caso si raggiunge una precisione maggiore.

Per planimetrare un appezzamento si dispone il polo P in un punto esterno o interno alla superficie e si colloca il puntatore sopra un punto qualunque del contorno. Posta uguale a zero la lettura iniziale, si fa percorrere al puntatore tutto il perimetro dell'appezzamento fino a ritornare al punto di partenza. In questo movimento la **rotella** avrà compiuto un certo numero N di giri. La parte intera di N viene letta sul **disco contagiri**, i decimi e i centesimi di giro al **tamburo** e i millesimi al **nonio** (▶FIGURA 16*b*). L'area dell'appezzamento è proporzionale al numero di giri fatti dalla **rotella**.

Indicando con S l'area dell'appezzamento, operando a *polo esterno* si ha:

$$S = K \cdot N \tag{11}$$

mentre operando a *polo interno* si ha:

$$S = K \cdot N + C \tag{12}$$

Nelle (11) e (12), N è il **numero di giri** fatto dalla rotella, K e C sono due **costanti** che dipendono dal raggio della rotella, dalla lunghezza dell'asta segnatrice e dalla lunghezza del braccio polare.

FAQ

▶ Nella misura di un'area con il planimetro polare, quando è necessario sistemare il polo all'interno dell'area da misurare?

Quando l'estensione dell'area è tale da non consentire il tracciamento del suo contorno da un polo esterno a essa.

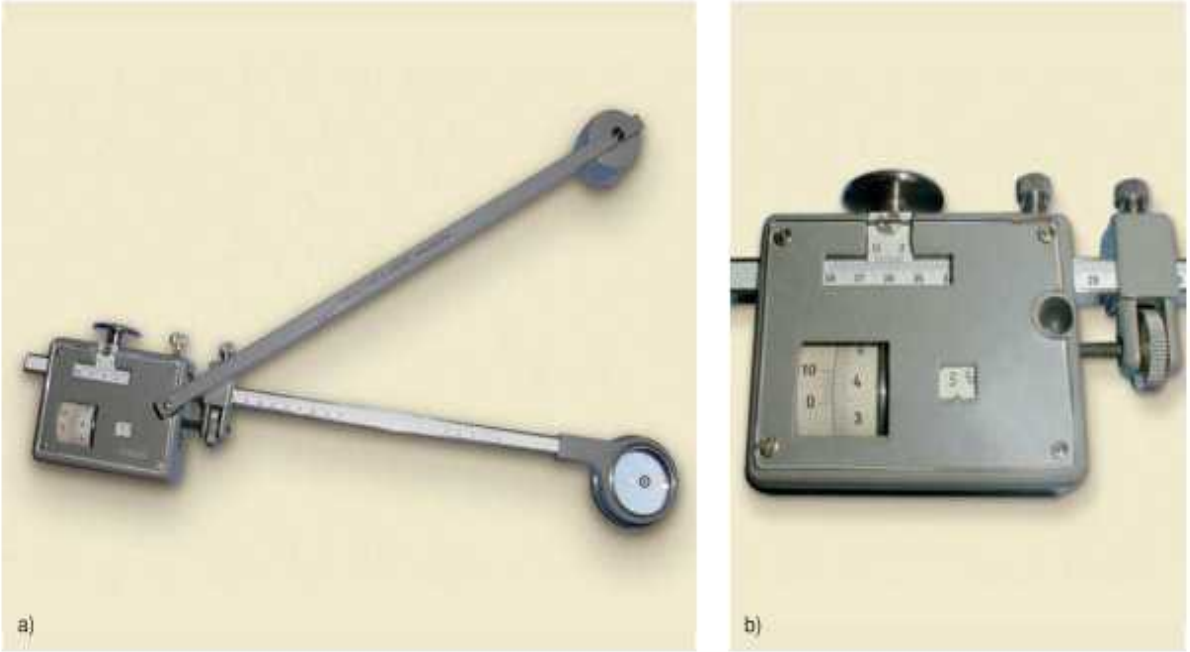


FIGURA 16 Planimetro polare di Amsler (*a*) e particolare della scatola porta rotella con in primo piano il tamburo e il nonio di lettura (*b*).

so in cento parti di graduazione. Al bordo del tamburo è applicato un **nonio** che permette di apprezzare il decimo della parte di rotella: ne consegue che l'unità di graduazione si spinge al millesimo di giro della rotella. Lo strumento è dotato anche di un dispositivo per riportare a zero la lettura iniziale e di un *disco contagiri* nel quale si possono leggere fino a 10 giri completi della rotella. Nella ▶FIGURA 16 è illustrato un planimetro polare.

Il **planimetro polare** può essere usato con il polo fisso in posizione esterna alla figura (a *polo esterno*), quando si devono planimetrare piccole aree, o in posizione interna (a *polo interno*) per le grandi aree. Nel primo caso si raggiunge una precisione maggiore.

Per planimetrare un appezzamento si dispone il polo P in un punto esterno o interno alla superficie e si colloca il puntatore sopra un punto qualunque del contorno. Posta uguale a zero la lettura iniziale, si fa percorrere al puntatore tutto il perimetro dell'appezzamento fino a ritornare al punto di partenza. In questo movimento la **rotella** avrà compiuto un certo numero N di giri. La parte intera di N viene letta sul **disco contagiri**, i decimi e i centesimi di giro al **tamburo** e i millesimi al **nonio** (▶FIGURA 16*b*). L'area dell'appezzamento è proporzionale al numero di giri fatti dalla **rotella**.

Indicando con S l'area dell'appezzamento, operando a *polo esterno* si ha:

$$S = K \cdot N \tag{11}$$

mentre operando a *polo interno* si ha:

$$S = K \cdot N + C \tag{12}$$

Nelle (11) e (12), N è il **numero di giri** fatto dalla rotella, K e C sono due **costanti** che dipendono dal raggio della rotella, dalla lunghezza dell'asta segnatrice e dalla lunghezza del braccio polare.

FAQ

▶ **Nella misura di un'area con il planimetro polare, quando è necessario sistemare il polo all'interno dell'area da misurare?**

Quando l'estensione dell'area è tale da non consentire il tracciamento del suo contorno da un polo esterno a essa.

FIGURA 16 Planimetro polare di Amsler (*a*) e particolare della scatola porta rotella con in primo piano il tamburo e il nonio di lettura (*b*).

so in cento parti di graduazione. Al bordo del tamburo è applicato un **nonio** che permette di apprezzare il decimo della parte di rotella: ne consegue che l'unità di graduazione si spinge al millesimo di giro della rotella. Lo strumento è dotato anche di un dispositivo per riportare a zero la lettura iniziale e di un *disco contagiri* nel quale si possono leggere fino a 10 giri completi della rotella. Nella ▶FIGURA 16 è illustrato un planimetro polare.

Il **planimetro polare** può essere usato con il polo fisso in posizione esterna alla figura (a *polo esterno*), quando si devono planimetrare piccole aree, o in posizione interna (a *polo interno*) per le grandi aree. Nel primo caso si raggiunge una precisione maggiore.

Per planimetrare un appezzamento si dispone il polo P in un punto esterno o interno alla superficie e si colloca il puntatore sopra un punto qualunque del contorno. Posta uguale a zero la lettura iniziale, si fa percorrere al puntatore tutto il perimetro dell'appezzamento fino a ritornare al punto di partenza. In questo movimento la **rotella** avrà compiuto un certo numero N di giri. La parte intera di N viene letta sul **disco contagiri**, i decimi e i centesimi di giro al **tamburo** e i millesimi al **nonio** (▶FIGURA 16*b*). L'area dell'appezzamento è proporzionale al numero di giri fatti dalla **rotella**.

Indicando con S l'area dell'appezzamento, operando a *polo esterno* si ha:

$$S = K \cdot N \tag{11}$$

mentre operando a *polo interno* si ha:

$$S = K \cdot N + C \tag{12}$$

Nelle (11) e (12), N è il **numero di giri** fatto dalla rotella, K e C sono due **costanti** che dipendono dal raggio della rotella, dalla lunghezza dell'asta segnatrice e dalla lunghezza del braccio polare.

FAQ

▶ **Nella misura di un'area con il planimetro polare, quando è necessario sistemare il polo all'interno dell'area da misurare?**

Quando l'estensione dell'area è tale da non consentire il tracciamento del suo contorno da un polo esterno a essa.

• Il calcolo dell'area perimetrata

I planimetri sono costruiti generalmente in modo che una **unità di planimetro** (un millesimo di giro della rotella) vale 10 mm^2 di area rappresentata graficamente. Per avere quindi l'area misurata sul disegno, espressa in mm^2, con la (11) basta moltiplicare per 10 il numero di unità di planimetro. Con la (12) si deve aggiungere anche la costante C. Se, per esempio, la lettura effettuata alla fine del percorso risulta di 2304 unità di planimetro (2,304 giri della rotellina), l'area misurata sul disegno con la (11) vale $10 \cdot 2304 = 23040$ mm^2. Per avere l'area reale dell'appezzamento espressa in m^2 occorre tenere conto della scala del disegno. Se la scala è 1:1000, ogni mm^2 sulla carta corrisponde a 1 m^2 reale. In scala 1:2000 si ha 1 mm^2 = 4 m^2; in scala 1:5000 si ha 1 mm^2 = 25 m^2.

La *planimetrazione* può essere effettuata anche senza *portare a zero* la lettura iniziale del contatore. In questo caso la grandezza N delle (11) e (12) è data dalla **differenza** tra la lettura finale e quella iniziale effettuate al tamburo. Se la lettura finale risulta minore di quella iniziale, prima di fare la differenza occorre aumentare la prima di 10000. Questo perché la rotella può avere oltrepassato il numero scritto dopo il 9, che non va quindi considerato come zero ma come 10.

Buona norma è quella di planimetrare ogni area **più volte** e assumere come valore definitivo quello medio.

■ Altri tipi di planimetri

Il planimetro **lineare a rulli** meccanico (▶FIGURA 17) è caratterizzato da un carrello costituito da due rulli zigrinati e calettati su uno stesso albero. Il carrello a rulli è collegato al carrello contatore mediante un giogo, che sostituisce il braccio polare, munito di perno sferico. La superficie cilindrica dei rulli è zigrinata in modo da impedire sbandamenti e assicurare un moto rettilineo. Esso è particolarmente indicato per la misura delle aree di **figure allungate** o di **diagrammi a nastro** di strumenti registratori.

I planimetri **elettronici digitali** (▶FIGURA 18) possono essere polari o lineari a rulli. Si **imposta** preventivamente l'**unità** di misura e la **scala cartografica**, la misura dell'area compare su un display a cristalli liquidi. La lunghezza dell'asta segnatrice può essere modificata ruotando una apposita vite. Questi strumenti consentono una buona precisione, circa 0,1%.

FIGURA 17 Planimetro lineare meccanico a rulli.

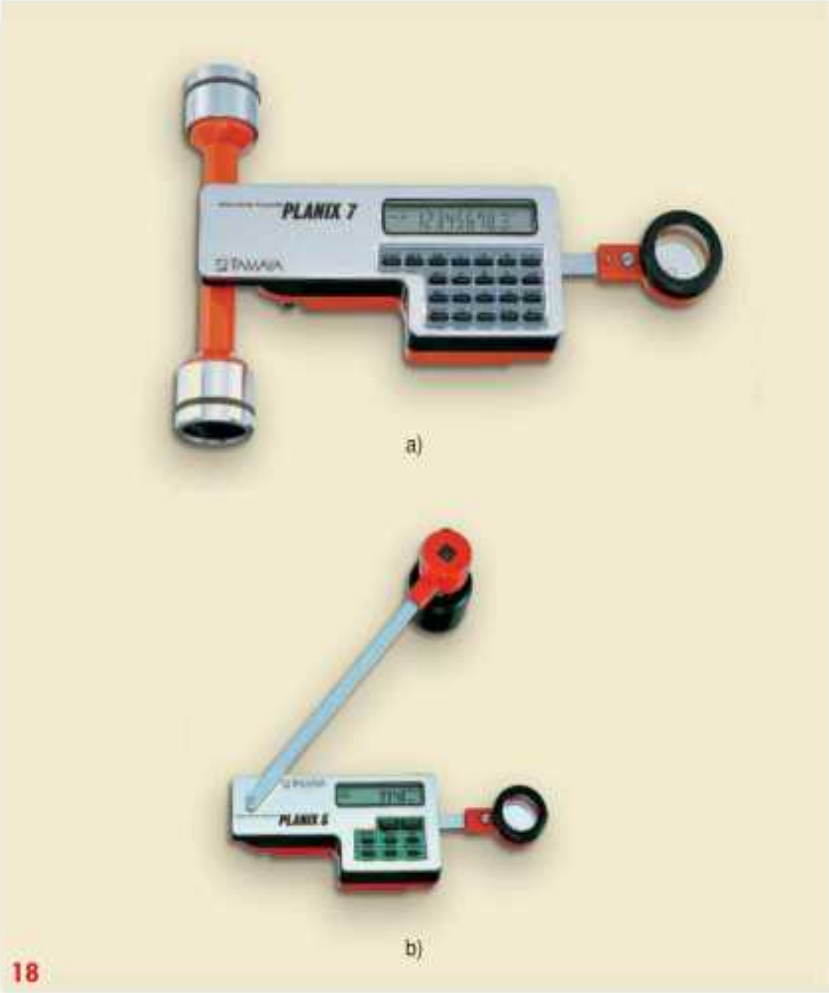


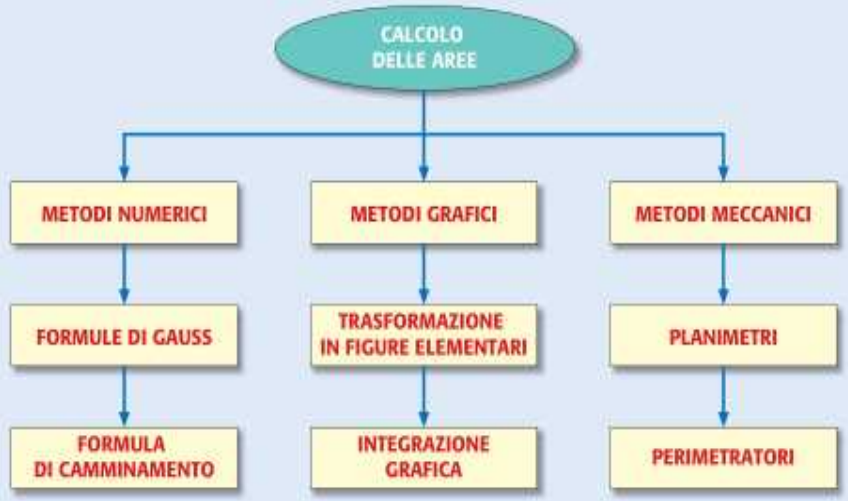
FIGURA 18 *a*) Planimetro digitale a rulli; *b*) planimetro polare digitale.

FIGURA 19 Planimetro digitale perimetratore con collegata stampante termica.

I planimetri **elettronici digitali di ultima generazione** (▶FIGURA 19) sono anche **perimetratori**, cioè forniscono oltre all'area anche la lunghezza del contorno tracciato ed eventuali **distanze** tra punti. Essi sono corredati di utili funzioni che li rendono pratici, semplici da usare ed efficaci. Con questi planimetri il calcolo della superficie di figure a contorno poligonale può essere effettuato posizionando il puntatore sui vertici della figura, senza la necessità di tracciare tutto il contorno. In questo modo l'operazione di misura diviene assai più rapida e si ottiene un significativo miglioramento della precisione di misura.

Riassumendo

MAPPA DI SINTESI DELL'UNITÀ



Superficie topografica: è la *proiezione* della *superficie fisica* di un appezzamento di terreno sul *piano orizzontale di riferimento*.

- La superficie topografica è il parametro utilizzato per i terreni in agrimensura in quanto *varia* soltanto se vengono *modificati i confini* dell'appezzamento.

Metodi numerici per il calcolo delle aree: sono metodi che vengono impiegati per calcolare l'area degli appezzamenti utilizzando solamente le *misure* effettuate sul terreno in fase di *rilievo*.

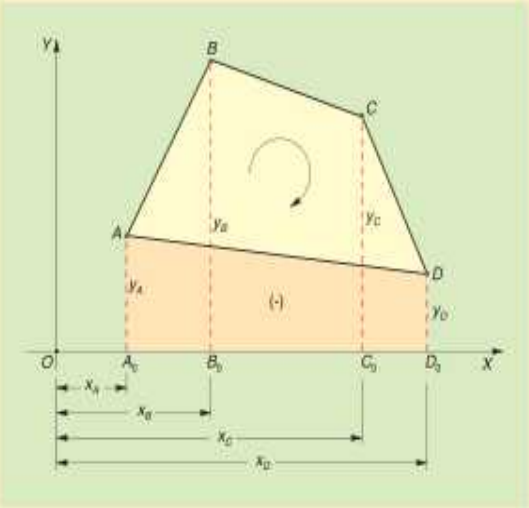
- Dipendono dal *tipo* di *rilievo* impiegato e utilizzano *formule geometriche* e *trigonometriche*.
- Sono *metodi laboriosi* ma *precisi* in quanto la loro precisione è influenzata unicamente da quella del rilievo.

Appezzamento rilevato per allineamenti e squadri: l'area viene calcolata come somma delle aree delle figure elementari (*triangoli* e *trapezi*) ottenute dividendo l'appezzamento mediante gli *allineamenti* e gli *squadri* istituiti in fase di rilievo.

Formula di Gauss: viene impiegata per calcolare l'area quando un appezzamento è stato rilevato per *coordinate cartesiane*. Indicando con x_i e y_i le coordinate cartesiane di uno qualsiasi degli n vertici dell'appezzamento, l'area è data da:

$$S = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_i y_i(x_{i+1} - x_{i-1}) = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_i x_i(y_{i-1} - y_{i+1})$$

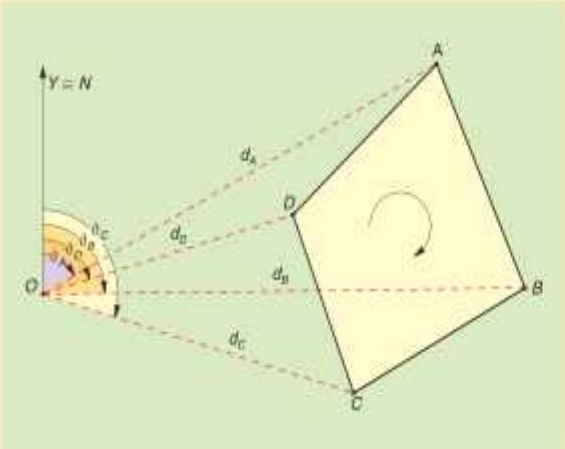
- Il primo vertice è anche quello successivo all'ultimo, mentre l'ultimo è anche quello che precede il primo.
- Se la numerazione dei vertici è *oraria* si ottiene *un'area positiva*, se è *antioraria* si ottiene la stessa area ma con il segno *negativo*.



Appezzamento rilevato per coordinate polari: indicando rispettivamente con d_i e θ_i la *distanza polare* e l'*angolo di direzione* di uno qualsiasi degli n vertici dell'appezzamento, l'area è data da:

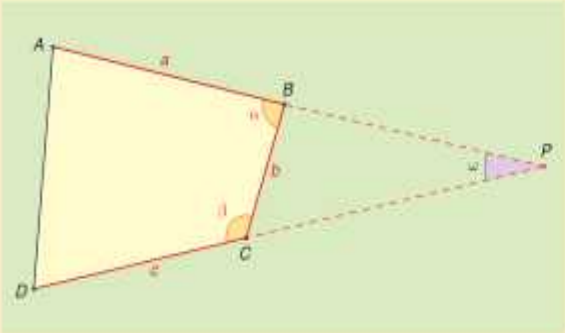
$$S = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_i d_i \cdot d_{i+1} \cdot \operatorname{sen}(\theta_{i+1} - \theta_i)$$

- Il primo vertice è anche quello successivo all'ultimo.
- Se l'appezzamento è stato rilevato da un *punto esterno* la sommatoria contiene *termini positivi* e *negativi*, se è stato rilevato da un *punto interno* contiene *termini solo positivi*.



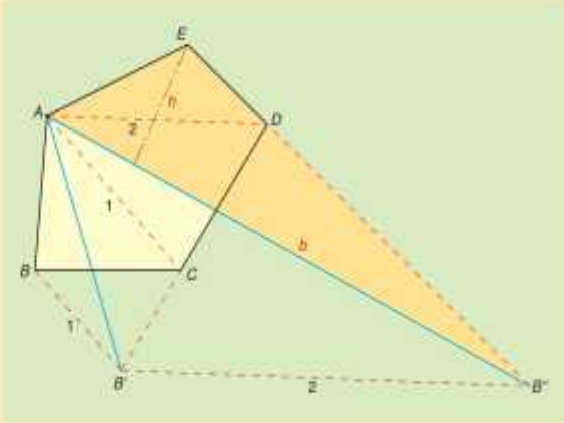
Formula di camminamento: viene impiegata per calcolare l'area quando di un appezzamento sono stati rilevati *tutti gli elementi tranne un lato e i due angoli adiacenti a esso*. L'area è data dalla semisomma di tutti i possibili prodotti dei lati presi a due alla volta per il seno della somma degli angoli fra essi compresi, col segno *positivo o negativo* a seconda se il numero degli angoli è *dispari o pari*. Nel caso dell'appezzamento di forma quadrilatera rappresentato in figura si ha:

$$S = (1/2)\,[ab \operatorname{sen} \alpha + bc \operatorname{sen} \beta - ac \operatorname{sen} (\alpha + \beta)]$$



Metodi grafici per il calcolo delle aree: sono metodi che consistono nel *trasformare* la rappresentazione grafica dell'appezzamento in un *triangolo* o in un *rettangolo equivalenti* e nel calcolarne l'area con la *base* e l'*altezza* appositamente misurate sul disegno.

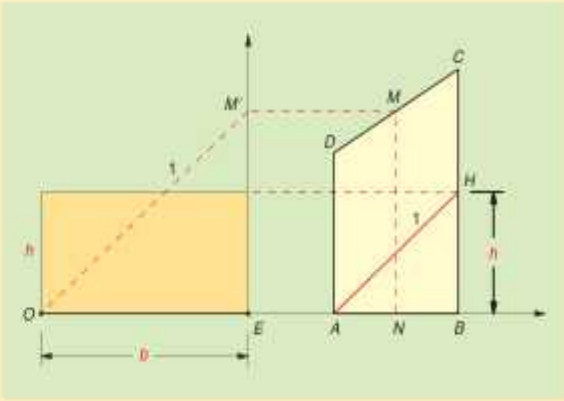
- Vengono applicati quando di un appezzamento si dispone solo del disegno sulla carta. Infatti sono metodi *poco precisi* in quanto risentono delle approssimazioni sia dell'elaborazione grafica sia delle misure prese sul disegno.

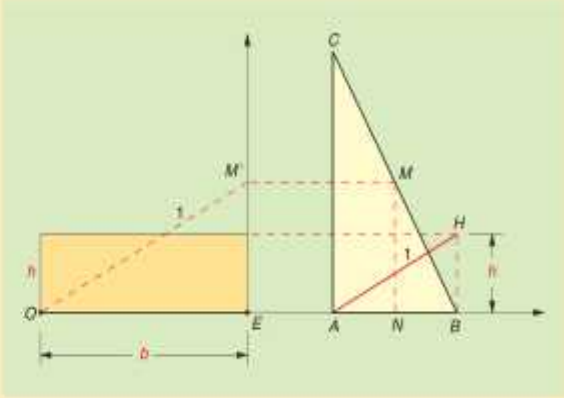


Trasformazione di un trapezio in un rettangolo equivalente di base data: con riferimento alla figura, si traccia la *media MN* delle *basi* del trapezio *ABCD* e si proietta *M* in *M'* sulla verticale condotta dall'estremo *E* della *base data* $OE = b$. Si traccia da *A* la *parallela* a *OM'* fino a incontrare in *H* la base *BC*. Il segmento $BH = h$ è l'*altezza* del *rettangolo* di base *b equivalente* al *trapezio ABCD* in quanto per la similitudine dei triangoli *ABH* e *OEM'* si ha:

$$b \cdot h = EM' \cdot AB$$

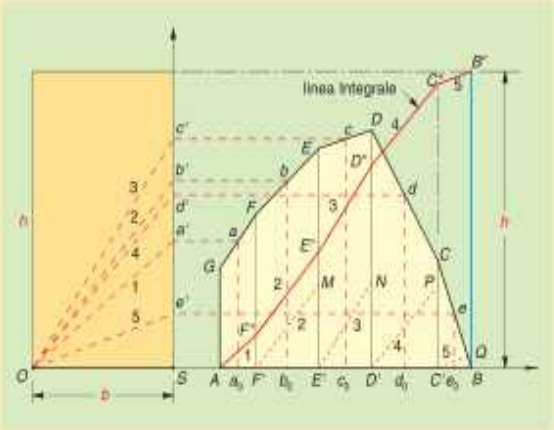
(*EM'* è la media delle basi del trapezio).



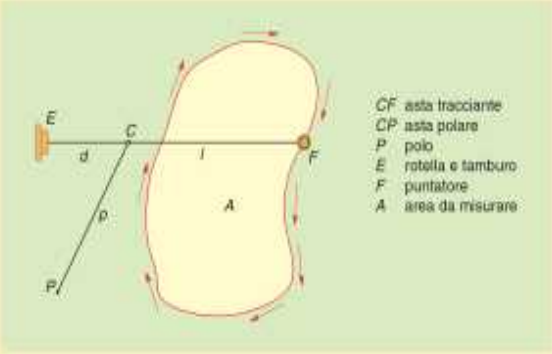


- Il procedimento resta sostanzialmente immutato se deve essere trasformato in *rettangolo equivalente* di base data *b* un *triangolo rettangolo*. Infatti quest'ultimo può essere considerato un trapezio rettangolo con una delle due basi nulla.

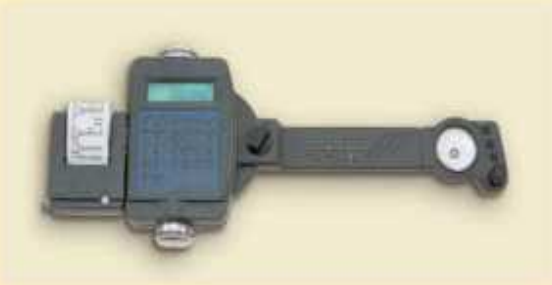
Integrazione grafica: è un particolare procedimento grafico che consente di *trasformare* un *poligono* in un *rettangolo equivalente* di *base assegnata*. Tracciando le *ordinate* dei vertici si divide il poligono *ABCDEFG* della figura in *trapezi* e *triangoli rettangoli*. Questi vengono *trasformati* in *rettangoli equivalenti* di *base data b* come visto in precedenza. L'*ordinata* di ogni vertice della *spezzata AF"E"D"C"B"* rappresenta l'*altezza* del *rettangolo* di *base b equivalente* alla *somma* dei *trapezi* che *precedono* tale ordinata.



Metodi meccanici per il calcolo delle aree: si *segue* tutto il *contorno* della rappresentazione in scala dell'appezzamento con la *lente* (*puntatore*) posta a un estremo dell'*asta* (*tracciante*) di un apposito strumento chiamato *planimetro polare*. Un'altra *asta* (*polare*) del planimetro è collegata a cerniera in un estremo con la tracciante mentre l'altro estremo (*polo*) deve rimanere *fisso* in fase operativa. L'area è *proporzionale* al *numero* di *giri* compiuti da una *rotella graduata* durante la perimetrazione del contorno della superficie. I *giri* vengono *misurati* da un *disco contagiri* mentre le *frazioni* di giro vengono lette su un *tamburo* provvisto di *nonio*. Il *polo* può essere tenuto in posizione *interna* o *esterna* all'appezzamento; nel primo caso si ottiene una precisione maggiore.



- Nei *planimetri digitali* l'area viene letta direttamente sul display dello strumento. Essi forniscono anche la lunghezza del *perimetro* ed eventuali *distanze* tra punti.



LABORATORIO INFORMATICO

Excel — Calcolo dell'area di una figura piana a contorno poligonale

DI COSA CI OCCUPIAMO

In questa esercitazione proponiamo la creazione di un foglio elettronico impostato per il calcolo dell'area di una figura a contorno poligonale, quando siano note le coordinate cartesiane dei vertici della figura. Si tratta in effetti di applicare la nota formula di Gauss adattandola alla struttura del foglio elettronico.

1. Premessa

Una delle operazioni più frequenti richieste al tecnico geometra è quella del calcolo dell'area di una superficie a contorno poligonale (per esempio in ambito catastale o estimativo). Il modo più brillante per risolvere il problema fa ricorso alla formula di Gauss già illustrata nella parte teorica; essa richiede la conoscenza delle **coordinate cartesiane** dei vertici del contorno poligonale (disposti in senso orario) e può assumere aspetti formali diversi, ma del tutto equivalenti.

Consideriamo la figura poligonale illustrata in ▶FIGURA A, il cui contorno è costituito da 12 vertici e di cui sono note le coordinate cartesiane (riportate tra parentesi). Per calcolare la sua area possiamo utilizzare la formula di Gauss:

$$S = \sum_{1}^{n} \frac{1}{2} x_i (y_{i-1} - y_{i+1}) \qquad \text{(I)}$$

L'indice i rappresenta un **generico vertice** del contorno, quello $i + 1$ il vertice **successivo**, quello $i - 1$ il vertice **precedente**. Considerando il modo **ciclico** con cui i vertici si succedono, quando $i = 1$ va posto $i - 1 = n$. Quando $i = n$ va posto $i + 1 = 1$.

Di fatto l'applicazione di questa formula consiste nel **ripetere**, tante volte quanti sono i vertici del contorno della figura, il prodotto riportato nella (I) ed è, pertanto, particolarmente adatta per essere sviluppata nella struttura logica a **griglia** del *foglio elettronico*. Ciascun prodotto determina delle generiche **aree parziali** la cui somma fornisce come risultato finale l'area S della figura.

Il problema può essere impostato sviluppando sul foglio i seguenti passi:

1) caricamento delle **celle** con le coordinate dei vertici della figura;
2) scrittura della formula (I) per il **primo** vertice $i = 1$;
3) scrittura della formula (I) per i vertici **intermedi** (nel nostro caso $2 < i < 11$);
4) scrittura della formula (I) per l'**ultimo** vertice $i = n$ (nel nostro caso 12);
5) scrittura della formula per la **somma** dei prodotti parziali.

2. Preparazione del foglio

Possiamo subito individuare sul foglio i seguenti spazi da utilizzare nel calcolo:

Elementi assegnati

Aree del foglio	Contenuto
Colonna A	Indicazione dei vertici
Colonna B	Ascisse dei vertici della figura
Colonna C	Ordinate dei vertici della figura
Colonna D	Vuota (separatore)

Elementi calcolati

Colonna E	Aree parziali calcolate con la formula (I)

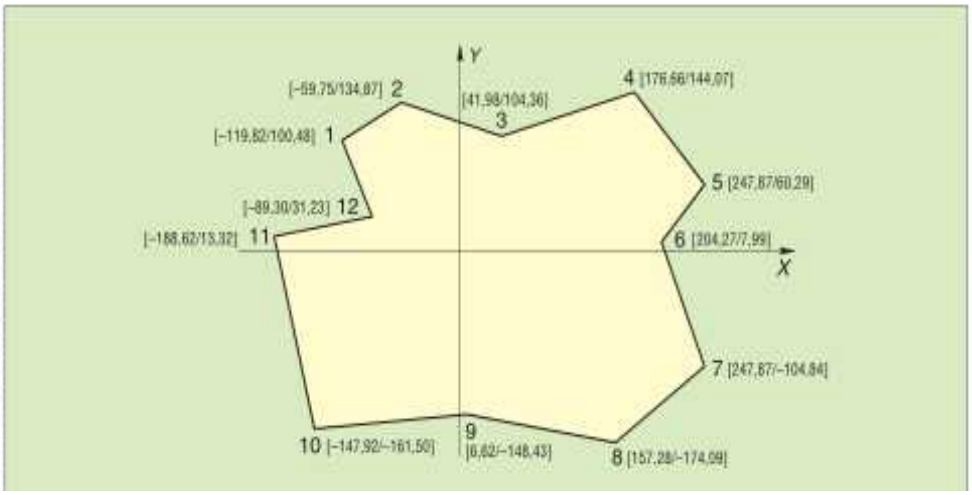


FIGURA A Schema della figura della quale si vuole determinare l'area. Essa è costituita da 12 vertici di cui si conoscono le coordinate cartesiane riportate tra parentesi

LABORATORIO INFORMATICO

Excel — Calcolo dell'area di una figura piana a contorno poligonale

DI COSA CI OCCUPIAMO

In questa esercitazione proponiamo la creazione di un foglio elettronico impostato per il calcolo dell'area di una figura a contorno poligonale, quando siano note le coordinate cartesiane dei vertici della figura. Si tratta in effetti di applicare la nota formula di Gauss adattandola alla struttura del foglio elettronico.

1. Premessa

Una delle operazioni più frequenti richieste al tecnico geometra è quella del calcolo dell'area di una superficie a contorno poligonale (per esempio in ambito catastale o estimativo). Il modo più brillante per risolvere il problema fa ricorso alla formula di Gauss già illustrata nella parte teorica; essa richiede la conoscenza delle **coordinate cartesiane** dei vertici del contorno poligonale (disposti in senso orario) e può assumere aspetti formali diversi, ma del tutto equivalenti.

Consideriamo la figura poligonale illustrata in ▶FIGURA A, il cui contorno è costituito da 12 vertici e di cui sono note le coordinate cartesiane (riportate tra parentesi). Per calcolare la sua area possiamo utilizzare la formula di Gauss:

$$S = \sum_{1}^{n}{}_{i} \frac{1}{2} x_i (y_{i-1} - y_{i+1}) \qquad \text{(I)}$$

L'indice i rappresenta un **generico vertice** del contorno, quello $i + 1$ il vertice **successivo**, quello $i - 1$ il vertice **precedente**. Considerando il modo **ciclico** con cui i vertici si succedono, quando $i = 1$ va posto $i - 1 = n$. Quando $i = n$ va posto $i + 1 = 1$.

Di fatto l'applicazione di questa formula consiste nel **ripetere**, tante volte quanti sono i vertici del contorno della figura, il prodotto riportato nella (I) ed è, pertanto, particolarmente adatta per essere sviluppata nella struttura logica a **griglia** del *foglio elettronico*. Ciascun prodotto determina delle generiche **aree parziali** la cui somma fornisce come risultato finale l'area S della figura.

Il problema può essere impostato sviluppando sul foglio i seguenti passi:

1) caricamento delle **celle** con le coordinate dei vertici della figura;
2) scrittura della formula (I) per il **primo** vertice $i = 1$;
3) scrittura della formula (I) per i vertici **intermedi** (nel nostro caso $2 < i < 11$);
4) scrittura della formula (I) per l'**ultimo** vertice $i = n$ (nel nostro caso 12);
5) scrittura della formula per la **somma** dei prodotti parziali.

2. Preparazione del foglio

Possiamo subito individuare sul foglio i seguenti spazi da utilizzare nel calcolo:

Aree del foglio	Contenuto
Elementi assegnati	
Colonna A	Indicazione dei vertici
Colonna B	Ascisse dei vertici della figura
Colonna C	Ordinate dei vertici della figura
Colonna D	Vuota (separatore)
Elementi calcolati	
Colonna E	Aree parziali calcolate con la formula (I)

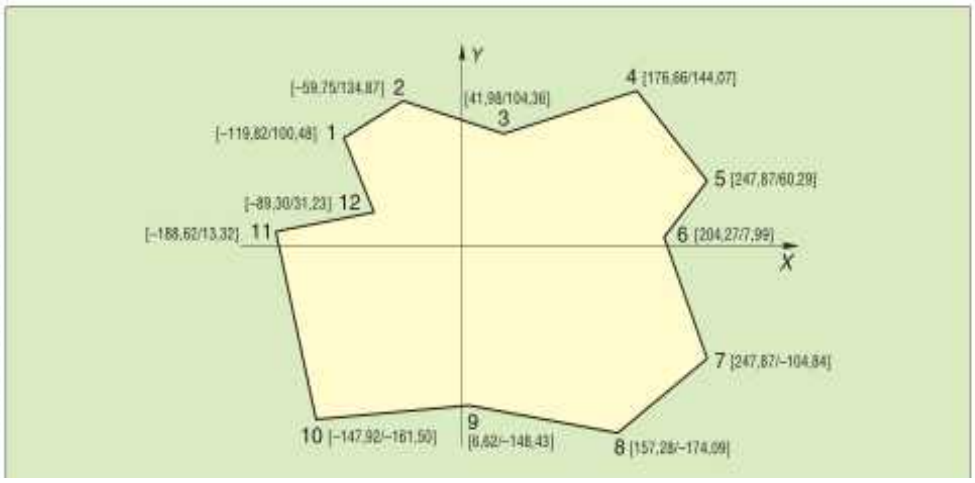


FIGURA A Schema della figura della quale si vuole determinare l'area. Essa è costituita da 12 vertici di cui si conoscono le coordinate cartesiane riportate tra parentesi

LABORATORIO INFORMATICO

Excel — Calcolo dell'area di una figura piana a contorno poligonale

DI COSA CI OCCUPIAMO

In questa esercitazione proponiamo la creazione di un foglio elettronico impostato per il calcolo dell'area di una figura a contorno poligonale, quando siano note le coordinate cartesiane dei vertici della figura. Si tratta in effetti di applicare la nota formula di Gauss adattandola alla struttura del foglio elettronico.

1. Premessa

Una delle operazioni più frequenti richieste al tecnico geometra è quella del calcolo dell'area di una superficie a contorno poligonale (per esempio in ambito catastale o estimativo). Il modo più brillante per risolvere il problema fa ricorso alla formula di Gauss già illustrata nella parte teorica; essa richiede la conoscenza delle **coordinate cartesiane** dei vertici del contorno poligonale (disposti in senso orario) e può assumere aspetti formali diversi, ma del tutto equivalenti.

Consideriamo la figura poligonale illustrata in ▶FIGURA A, il cui contorno è costituito da 12 vertici e di cui sono note le coordinate cartesiane (riportate tra parentesi). Per calcolare la sua area possiamo utilizzare la formula di Gauss:

$$S = \sum_{i}^{n} \frac{1}{2} x_i (y_{i-1} - y_{i+1}) \qquad \text{(I)}$$

L'indice i rappresenta un **generico vertice** del contorno, quello $i + 1$ il vertice **successivo**, quello $i - 1$ il vertice **precedente**. Considerando il modo **ciclico** con cui i vertici si succedono, quando $i = 1$ va posto $i - 1 = n$. Quando $i = n$ va posto $i + 1 = 1$.

Di fatto l'applicazione di questa formula consiste nel **ripetere**, tante volte quanti sono i vertici del contorno della figura, il prodotto riportato nella (I) ed è, pertanto, particolarmente adatta per essere sviluppata nella struttura logica a **griglia** del *foglio elettronico*. Ciascun prodotto determina delle generiche **aree parziali** la cui somma fornisce come risultato finale l'area S della figura.

Il problema può essere impostato sviluppando sul foglio i seguenti passi:

1) caricamento delle **celle** con le coordinate dei vertici della figura;
2) scrittura della formula (I) per il **primo** vertice $i = 1$;
3) scrittura della formula (I) per i vertici **intermedi** (nel nostro caso $2 < i < 11$);
4) scrittura della formula (I) per l'**ultimo** vertice $i = n$ (nel nostro caso 12);
5) scrittura della formula per la **somma** dei prodotti parziali.

2. Preparazione del foglio

Possiamo subito individuare sul foglio i seguenti spazi da utilizzare nel calcolo:

Elementi assegnati

Aree del foglio	Contenuto
Colonna A	Indicazione dei vertici
Colonna B	Ascisse dei vertici della figura
Colonna C	Ordinate dei vertici della figura
Colonna D	Vuota (separatore)

Elementi calcolati

Colonna E	Aree parziali calcolate con la formula (I)

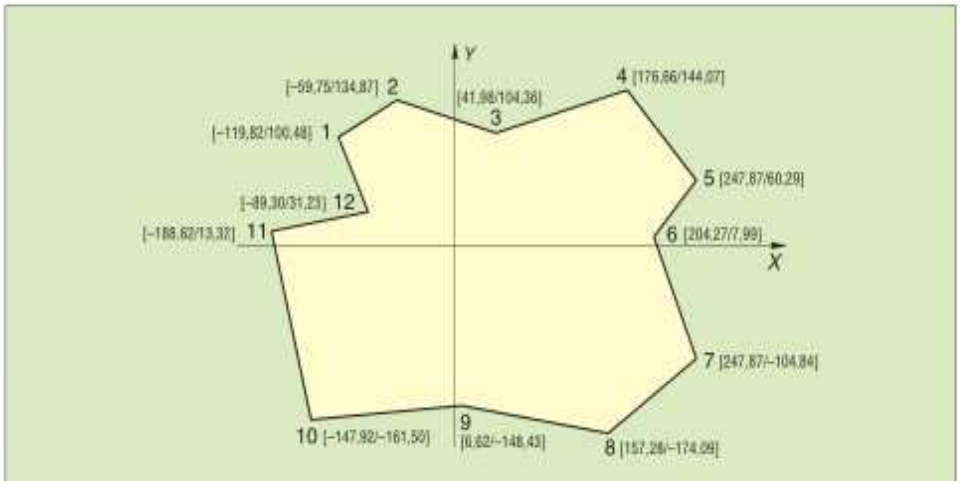
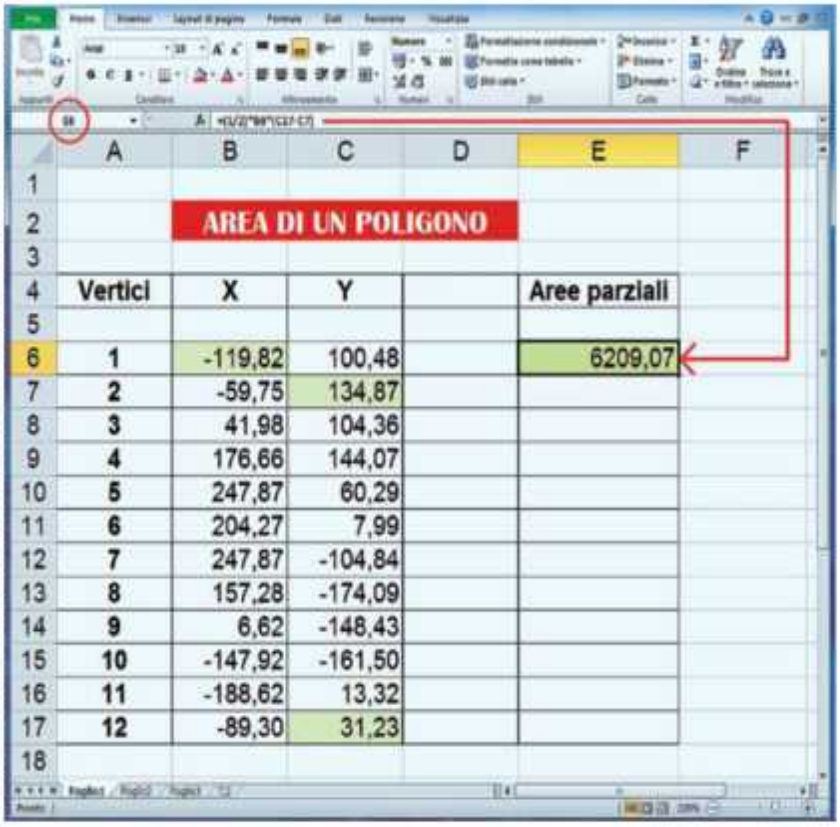


FIGURA A Schema della figura della quale si vuole determinare l'area. Essa è costituita da 12 vertici di cui si conoscono le coordinate cartesiane riportate tra parentesi

LABORATORIO INFORMATICO



	A	B	C	D	E	F
1						
2		AREA DI UN POLIGONO				
3						
4	Vertici	X	Y		Aree parziali	
5						
6	1	-119,82	100,48		6209,07	
7	2	-59,75	134,87			
8	3	41,98	104,36			
9	4	176,66	144,07			
10	5	247,87	60,29			
11	6	204,27	7,99			
12	7	247,87	-104,84			
13	8	157,28	-174,09			
14	9	6,62	-148,43			
15	10	-147,92	-161,50			
16	11	-188,62	13,32			
17	12	-89,30	31,23			
18						

FIGURA B Introduzione delle coordinate dei vertici e immissione del primo elemento della formula di Gauss ($i = 1$). Le celle con il fondo in colore sono quelle utilizzate nella formula presente nella cella attiva E6.

Utilizziamo poi le righe 1, 2 e 3 (▶FIGURA B) per inserire un titolo al foglio di calcolo, e la riga 4 per inserire i titoli di ciascuna colonna impiegata. Le dodici righe dalla 6 alla 17 verranno utilizzate nel calcolo, a ciascuna di essa corrisponde un **vertice** del contorno della figura.

Dunque iniziamo con l'inserire il **numero** dei vertici tra le righe 6 e 17 della colonna A. Il caricamento può essere eseguito **manualmente**, introducendo cella per cella i numeri da 1 a 12, oppure attivando il **riempimento** automatico delle celle stesse.

Per ottenere il *riempimento automatico* occorre attivare la seguente procedura:

- introdurre il valore 1 nella cella **A6**;
- assicurarsi che la cella **A6** rimanga **attiva**;
- premere sul pulsante **Riempimento** del gruppo **Modifica** (sul lato destro della scheda **Home**) per fare scendere la *tendina* con i comandi disponibili;
- selezionare il comando **Serie...**;
- nella *finestra di dialogo* che appare selezionare **colonne** nel riquadro *«serie in»* e inserire 12 nella casella **Valore limite**. La colonna A diventerà come quella illustrata in ▶FIGURA B.

Possiamo poi utilizzare le celle delle colonne **B** e **C** comprese tra le righe 6 e 17, per caricare le coordinate cartesiane dei vertici, riportate nella ▶FIGURA A, con la seguente

$$\begin{array}{ll} x_1 \rightarrow \text{B6} & y_1 \rightarrow \text{C6} \\ x_2 \rightarrow \text{B7} & y_2 \rightarrow \text{C7} \\ x_3 \rightarrow \text{B8} & y_3 \rightarrow \text{C8} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ x_{12} \rightarrow \text{B17} & y_{12} \rightarrow \text{C17} \end{array} \qquad \text{(II)}$$

L'immissione di questi valori, che costituiscono i dati del problema, non può che essere manuale, cella per cella, e il risultato è quello illustrato in ▶FIGURA B.

La nostra attenzione deve ora trasferirsi alla colonna **E** (lasciando vuota la colonna **D** come elemento separatore). Essa dovrà contenere le formule in grado di simulare l'applicazione della (I). Prima di procedere all'immissione di tali formule, considerando che le aree spesso hanno valori elevati, conviene aumentare la **larghezza** di questa colonna portandola dal valore predefinito 8,11 al valore 12,00, con la seguente procedura:

- **selezionare** direttamente la colonna **E** premendo con il puntatore del mouse sul bottone in cima alla colonna;
- premere sul pulsante **Formato** nel gruppo **Celle** (scheda **Home**) per fare scendere la tendina contenente i comandi di formattazione delle celle;
- selezionare il comando **Larghezza colonne...** (i tre puntini di sospensione preannunciano la successiva apertura di una finestra di dialogo);
- nella *finestra di dialogo* che appare, sostituire il valore

LABORATORIO INFORMATICO

la colonna **E** assumeranno il nuovo valore per la loro larghezza.

3. Calcolo delle aree parziali

La formula (I) esprime in modo sintetico e compatto la somma di tanti prodotti quanti sono i vertici della figura; essa, scritta per esteso, corrisponde alla seguente sequenza:

$$\begin{array}{ll} \text{per } i = 1: & [(1/2) \cdot x_1 \cdot (y_{12} - y_2)] + \\ \text{per } i = 2: & [(1/2) \cdot x_2 \cdot (y_1 - y_3)] + \\ \text{per } i = 3: & [(1/2) \cdot x_3 \cdot (y_2 - y_4)] + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{per } i = 12: & [(1/2) \cdot x_{12} \cdot (y_{11} - y_1)] = \end{array} \qquad \text{(III)}$$

La prima delle espressioni (III) deve essere caricata nella cella **E6**. Dunque occorre rendere **attiva** questa cella (▶FIGURA B) e, ricordando la corrispondenza mostrata nelle (II), possiamo introdurre l'espressione relativa a $i = 1$:

Calcolo del primo elemento della sommatoria: $i = 1$

Formula	Cella e descrizione
= (1/2)*B6*(C17−C7)	In E6 per il calcolo del primo elemento della sommatoria: $i = 1$

Ultimata l'immissione, l'espressione viene **valutata** dal foglio elettronico e nella cella E6 appare il valore numerico corrispondente al primo elemento della sommatoria. Rendendo poi attiva la cella E7, possiamo introdurre la seconda espressione delle (III) corrispondente a $i = 2$ (▶FIGURA C):

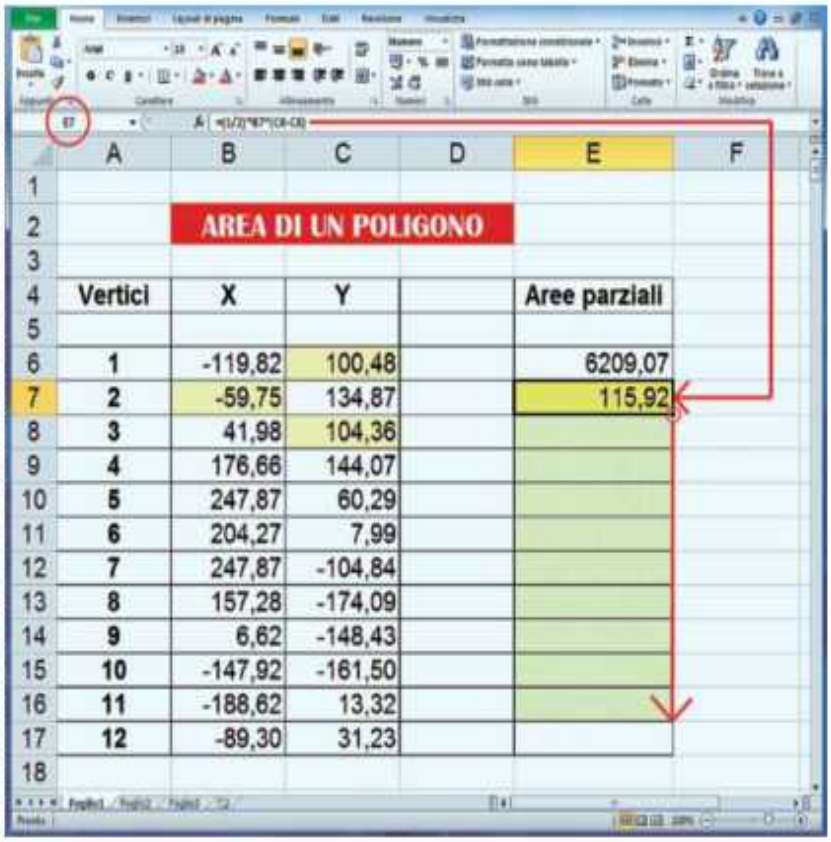
Calcolo del secondo elemento della sommatoria: $i = 2$

Formula	Cella e descrizione
= (1/2)*B7*(C6−C8)	In E7 per il calcolo del secondo elemento della sommatoria: $i = 2$

Questa formula, essendo costituita da **riferimenti relativi**, può essere **copiata** (con una delle varie modalità concesse da Excel) nelle celle della colonna **E** comprese tra la riga **8** e la riga **16** (**penultima** della serie) corrispondenti ai vertici compresi tra 3 e 11, evitando le lungaggini dell'introduzione manuale in queste celle. Il modo più rapido per **copiare** nelle celle sottostanti la formula appena introdotta nella cella attiva E7 è quello di **trascinare** verso il basso, fino alla cella E16, la «**maniglia**» della cella attiva E7. Questa è evidenziata con un **quadratino nero** nell'angolo basso destro della cella quando questa viene resa attiva.

I **riferimenti relativi** modificano via via le formule copiate, adattandole automaticamente alla **nuova posizione**.

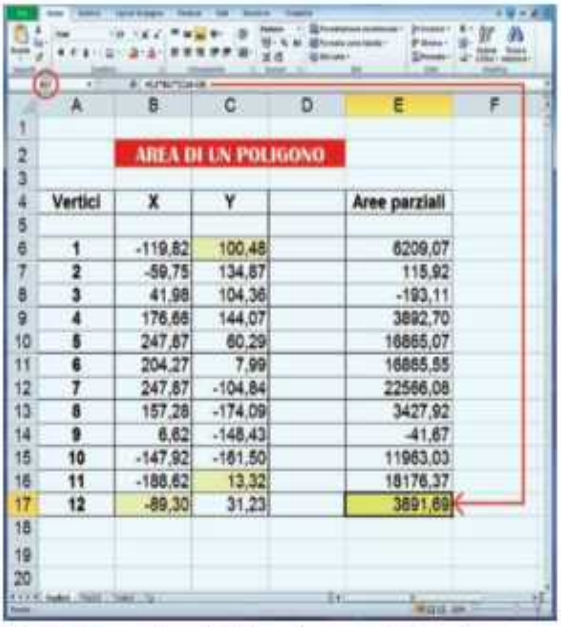
Resta ora da introdurre manualmente l'ultima delle (III) corrispondente a $i = 12$. Essa viene introdotta nella cella E17 (▶FIGURA D):



	A	B	C	D	E	F
1						
2		AREA DI UN POLIGONO				
3						
4	Vertici	X	Y		Aree parziali	
5						
6	1	-119,82	100,48		6209,07	
7	2	-59,75	134,87		115,92	
8	3	41,98	104,36			
9	4	176,66	144,07			
10	5	247,87	60,29			
11	6	204,27	7,99			
12	7	247,87	-104,84			
13	8	157,28	-174,09			
14	9	6,62	-148,43			
15	10	-147,92	-161,50			
16	11	-188,62	13,32			
17	12	-89,30	31,23			
18						

FIGURA C Immissione del secondo elemento della formula di Gauss, per $i = 2$, e copiatura della stessa formula nelle celle intermedie sottostanti per $3 < i < 11$.
La copiatura può avvenire rapidamente trascinando verso il basso la «maniglia» della cella E7 resa attiva.

LABORATORIO INFORMATICO



	A	B	C	D	E	F
1						
2		AREA DI UN POLIGONO				
3						
4	Vertici	X	Y		Aree parziali	
5						
6	1	-119,82	100,48		6209,07	
7	2	-59,75	134,87		115,92	
8	3	41,98	104,36		-193,11	
9	4	176,66	144,07		3892,70	
10	5	247,87	60,29		16865,07	
11	6	204,27	7,99		16865,55	
12	7	247,87	-104,84		22566,08	
13	8	157,28	-174,09		3427,92	
14	9	6,62	-148,43		-41,67	
15	10	-147,92	-161,50		11963,03	
16	11	-188,62	13,32		18176,37	
17	12	-89,30	31,23		3891,69	
18						
19						
20						

FIGURA D Immissione dell'ultimo elemento della formula di Gauss (i = 12). La relativa formula è stata inserita nella cella E17.

	A	B	C	D	E	F
1						
2		AREA DI UN POLIGONO				
3						
4	Vertici	X	Y		Aree parziali	
5						
6	1	-119,82	100,48		6209,07	
7	2	-59,75	134,87		115,92	
8	3	41,98	104,36		-193,11	
9	4	176,66	144,07		3892,70	
10	5	247,87	60,29		16865,07	
11	6	204,27	7,99		16865,55	
12	7	247,87	-104,84		22566,08	
13	8	157,28	-174,09		3427,92	
14	9	6,62	-148,43		-41,67	
15	10	-147,92	-161,50		11963,03	
16	11	-188,62	13,32		18176,37	
17	12	-89,30	31,23		3891,69	
18						
19		Area del Poligono (mq)			103,738,63	
20						

FIGURA E Calcolo dell'area del poligono e completamento del foglio di calcolo con titoli e con l'uso dei colori.

Calcolo dell'ultimo elemento della sommatoria: $i = 12$

Formula	Cella e descrizione
= (1/2)* B17*(C16−C6)	In E17 per il calcolo dell'ultimo elemento della sommatoria: $i = 12$

4. Calcolo dell'area della figura

Ora non resta che fare la somma dei valori delle precedenti espressioni. Dunque rendiamo attiva la cella E19 e, utilizzando la funzione **somma** di Excel (che come noto fornisce la somma dei valori contenuti nel gruppo di celle indicato), possiamo scrivere la seguente espressione, che fornisce la somma dei valori contenuti nel **gruppo di celle** comprese tra la E6 e la E17. Questa somma, naturalmente, costituisce l'**area** della figura cercata (▶FIGURA E):

Calcolo dell'area del poligono

Formula	Cella e descrizione
= SOMMA(E6:E17)	In E19 per la somma delle aree parziali

È poi utile inserire a fianco di questo valore un'**etichetta di testo** che ne renda immediato il significato, per esempio «Area del poligono». Questo testo però è troppo lungo per poter essere contenuto in una delle celle predisposte in precedenza. Si scelgono allora le 4 celle A19, B19, C19 e D19, immediatamente alla sinistra della cella E19 che contiene il valore da mettere in evidenza. Esse possono essere unite in modo da formare un'**unica cella** in grado di contenere il testo desiderato. In questo modo il calcolo è terminato, tuttavia è bene completare il foglio con **titoli** e **commenti**, oltre che con la **formattazione** delle celle e l'impiego di fondi colorati, per garantire un aspetto più efficace e una più rapida leggibilità del calcolo.

Naturalmente, **cambiando** le coordinate di uno o più vertici della figura, il calcolo verrà **rieseguito** immediatamente fornendo il valore della nuova area.

Volendo poi determinare l'area di una figura con un **numero di vertici diverso** da quello proposto, sarà facile adattare lo schema precedente, aggiungendo nuove righe per un numero maggiore di vertici, oppure togliendone se la figura avesse un numero minore di vertici, e modificando il riferimento alle celle su cui effettuare la somma nella cella E19.

Autovalutazione

A. Verifica delle conoscenze

QUESITI VERO/FALSO

		V	F
1	In agrimensura si calcola l'area della superficie fisica dei terreni	☐	☐
2	I metodi numerici per calcolare le aree sono sbrigativi e poco precisi	☐	☐
3	La formula di Gauss viene impiegata per calcolare l'area di un appezzamento rilevato per allineamenti liberi	☐	☐
4	Applicando la formula di Gauss con la numerazione dei vertici in senso orario si ottiene un'area negativa	☐	☐
5	Per applicare la formula di camminamento devono essere noti tutti gli elementi del perimetro, tranne un lato e i due angoli adiacenti	☐	☐
6	I metodi grafici per calcolare le aree sono più precisi di quelli numerici	☐	☐
7	La formula di camminamento è applicabile solo ai quadrilateri	☐	☐
8	Le coordinate polari dei vertici di un appezzamento poligonale consentono di ricavare la sua area direttamente	☐	☐
9	Per poter applicare i metodi grafici si deve disporre del disegno in scala dell'appezzamento	☐	☐
10	Quelli grafici sono i metodi più precisi per calcolare le aree	☐	☐

QUESITI A RISPOSTA SINGOLA

11 Per quali motivi in agrimensura si utilizza la superficie agraria dei terreni?

12 Quali dati vengono impiegati nei metodi numerici di calcolo delle aree?

13 Da cosa sono costituiti i termini della semisomma dell'area di un appezzamento rilevato per coordinate polari?

14 Quando vengono impiegati i metodi grafici per calcolare l'area di un appezzamento?

15 Enunciare la procedura grafica di integrazione, riferendola a una figura a contorno quadrilatero.

16 Perché i planimetri digitali sono anche detti perimetratori?

17 Illustrare il funzionamento di un planimetro polare.

18 Perché i metodi grafici sono quelli meno precisi nel calcolo delle aree?

19 In quali figure viene suddiviso un appezzamento da integrare graficamente?

20 Che cosa rappresenta l'ordinata di un generico vertice della spezzata integrale?

QUESITI A RISPOSTA MULTIPLA

21 La scelta del metodo numerico per calcolare l'area di un appezzamento dipende

- a dalla precisione che si vuole ottenere
- b dall'estensione dell'appezzamento
- c dal tipo di rilievo impiegato
- d dalla forma dell'appezzamento

22 Per calcolarne l'area un appezzamento rilevato per allineamenti e squadri deve essere suddiviso

- a in parti uguali
- b in figure elementari
- c in intervalli di lunghezza uguale
- d in un numero pari di intervalli

23 La formula di Gauss viene impiegata quando un appezzamento è stato rilevato

- a per allineamenti
- b per trilaterazione
- c per coordinate polari
- d per coordinate cartesiane

24 Per applicare la formula di camminamento occorre possedere:

- a tutti i lati
- b tutti i lati meno uno
- c tutti i lati meno due
- d nessuna delle precedenti

25 Quale componente fa parte di un planimetro polare di Amsler?

- a asta tracciante
- b rotella e tamburo
- c asta polare
- d tutti i precedenti

26 La trasformazione di un poligono in un triangolo equivalente viene effettuata tracciando

- a le diagonali
- b le ordinate dei vertici
- c le altezze
- d le bisettrici

27 I metodi grafici per calcolare le aree si applicano quando

a si vuole ottenere un'elevata precisione
b il rilievo è poco preciso
c si dispone solo del disegno in scala dell'appezzamento
d l'estensione dell'appezzamento è piccola

28 I metodi più precisi per calcolare le aree sono quelli

a grafici
b numerici
c meccanici
d tutti i precedenti

29 Per integrarlo graficamente un appezzamento deve essere suddiviso in

a trapezi rettangoli e triangoli rettangoli
b trapezi e triangoli
c rettangoli equivalenti
d triangoli equivalenti

30 Le ordinate dei vertici di una linea integrale rappresentano

a altezze di triangoli equivalenti
b altezze di rettangoli equivalenti
c basi di rettangoli equivalenti
d basi di triangoli equivalenti

B. Verifica delle competenze

Esercizi e problemi

31 Un appezzamento $ABCD$ di forma quadrilatera è stato rilevato per coordinate cartesiane ottenendo i seguenti valori:

$X_A = -25{,}31$ m $\quad X_B = +18{,}64$ m
$Y_A = +20{,}75$ m $\quad Y_B = +52{,}28$ m
$X_C = +75{,}94$ m $\quad X_D = +27{,}92$ m
$Y_C = +22{,}11$ m $\quad Y_D = -49{,}76$ m

Calcolare l'area dell'appezzamento applicando le formule di Gauss. $[S_{ABCD} = 5172{,}08\ \text{m}^2]$

32 Un appezzamento $ABCDEF$ di forma esagonale è stato rilevato per coordinate cartesiane ottenendo i seguenti valori:

$X_A = -35{,}22$ m $\quad X_B = -68{,}85$ m
$Y_A = -39{,}70$ m $\quad Y_B = -12{,}81$ m
$X_C = -30{,}42$ m $\quad X_D = +30{,}12$ m
$Y_C = +27{,}90$ m $\quad Y_D = +15{,}37$ m
$X_E = +67{,}90$ m $\quad X_F = +38{,}25$ m
$Y_E = -20{,}16$ m $\quad Y_F = -52{,}16$ m

Calcolare l'area dell'appezzamento applicando le formule di Gauss. $[S_{ABCDEF} = 6838{,}83\ \text{m}^2]$

33 Un appezzamento $ABCD$ di forma quadrilatera è stato rilevato per coordinate polari da un punto S esterno al quadrilatero ottenendo i seguenti valori:

$d_A = 78{,}32$ m $\quad d_B = 103{,}56$ m
$\vartheta_A = 32^c{,}1870 \quad \vartheta_B = 56^c{,}6930$
$d_C = 120{,}85$ m $\quad d_D = 100{,}52$ m
$\vartheta_C = 91^c{,}3940 \quad \vartheta_D = 125^c{,}2850$

Calcolare l'area dell'appezzamento. $[S_{ABCD} = 3936{,}97\ \text{m}^2]$

34 Un appezzamento $ABCDE$ di forma pentagonale è stato rilevato per coordinate polari da un punto S interno al pentagono ottenendo i seguenti valori:

$d_A = 135{,}78$ m $\quad d_B = 154{,}29$ m
$\vartheta_A = 337^c{,}9290 \quad \vartheta_B = 35^c{,}7980$
$d_C = 167{,}12$ m $\quad d_D = 124{,}92$ m
$\vartheta_C = 94^c{,}6950 \quad \vartheta_D = 178^c{,}3420$
$d_E = 146{,}43$ m
$\vartheta_E = 238^c{,}5160$

Calcolare l'area dell'appezzamento. $[S_{ABCDE} = 48\,216{,}74\ \text{m}^2]$

35 Un appezzamento $ABCD$ di forma quadrilatera è stato rilevato per camminamento ottenendo i seguenti valori:

$AB = 72{,}38$ m $\quad BC = 96{,}52$ m $\quad CD = 124{,}98$ m
$C\widehat{B}A = \beta = 110^c{,}3460 \quad D\widehat{C}B = \gamma = 103^c{,}2950$

Calcolare l'area dell'appezzamento. $[S_{ABCD} = 10\,432{,}25\ \text{m}^2]$

36 Un appezzamento $ABCDE$ di forma pentagonale è stato rilevato per camminamento ottenendo i seguenti valori:

$BC = 136{,}98$ m $\quad CD = 112{,}64$ m
$DE = 246{,}15$ m $\quad EA = 278{,}46$ m
$D\widehat{C}B = \gamma = 101^c{,}7870 \quad E\widehat{D}C = \delta = 110^c{,}3820$
$A\widehat{E}D = \omega = 94^c{,}6530$

Calcolare l'area dell'appezzamento. $[S_{ABCDE} = 41\,021{,}27\ \text{m}^2]$

37 Un terreno di contorno quadrilatero $ABCD$ è stato rilevato da una stazione interna S con uno strumento elettronico. I dati del rilievo sono riportati nel seguente registro di campagna:

St.	P.b.	Distanze orizz. (m)	C.O.	C.V.
S	A	39,00	32c,46	100c,00
	B	37,61	166c,06	109c,16
	C	36,66	275c,18	85c,62
	D	48,08	364c,83	96c,84

Scelto un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con origine in S e asse delle ordinate orientato secondo lo zero del cerchio azimutale, calcolare le coordinate dei punti A, B, C, D e l'area dell'appezzamento.
[$X_A = +19{,}03$ m; $Y_A = +34{,}04$ m; $X_B = +19{,}11$m; $Y_B = -32{,}39$ m; $X_C = -33{,}91$ m; $Y_C = -13{,}93$ m; $X_D = -25{,}23$ m; $Y_D = +40{,}93$ m; $S_{ABCD} = 3004{,}30$ m^2]

38 Per determinare planimetricamente la posizione dei punti A e B, si è fatta stazione con uno strumento elettronico prima in un terzo punto P di coordinate note rispetto a un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con l'asse delle ordinate orientato a nord e poi sul punto A da determinare. Con il cerchio azimutale orientato a nord sono state eseguite le osservazioni riportate nel seguente libretto:

St.	P.b.	Distanze orizz. (m)	C.O.	C.V.
P	A	74,51	358^c,70	109^c,80
A	P	–	158^c,70	–
	B	111,78	61^c,20	87^c,93

Le coordinate di P sono: $X_P = +201{,}60$ m, $Y_P = -197{,}50$ m. Calcolare le coordinate di A e B e l'area del triangolo ABP.
[$X_A = +156{,}58$ m; $Y_A = -138{,}13$ m; $X_B = +248{,}23$ m; $Y_B = -74{,}14$ m; $S_{ABP} = 4161{,}15$ m^2]

39 Si è fatta stazione in un punto S interno a un appezzamento quadrilatero $ABCD$ mediante uno strumento elettronico a graduazione centesimale destrorsa, con l'origine degli angoli orizzontali coincidente col nord, collimando successivamente a un prisma posto verticalmente in A, B, C, D. I dati del rilievo sono riportati nel seguente libretto:

St.	P.b.	Distanze orizz. (m)	C.O.	C.V.
S	A	90,06	11^c,2776	104^c,4444
	B	89,22	106^c,6285	94^c,0731
	C	82,81	244^c,6087	97^c,9620
	D	96,20	298^c,1296	100^c,0000

Calcolare le coordinate dei vertici e l'area del quadrilatero $ABCD$ assumendo un sistema di assi cartesiani ortogonali con origine in S e l'asse delle ordinate con direzione nord.
[$X_A = +15{,}87$ m; $Y_A = +88{,}65$ m; $X_B = +88{,}74$ m; $Y_B = -9{,}27$ m; $X_C = -53{,}40$ m; $Y_C = -63{,}30$ m; $X_D = -96{,}16$ m; $Y_D = -2{,}83$ m; $S_{ABCD} = 14\,270{,}83$ m^2]

40 Un appezzamento quadrangolare è stato rilevato facendo stazione in un punto interno O e collimando il prisma posto successivamente nei vertici A, B, C, D. Si sono misurati gli elementi riportati nel seguente libretto:

St.	P.b.	Distanze orizz. (m)	C.O.	C.V.
O	A	75,31	37°55′	88°02′
	B	93,90	91°12′	90°00′
	C	150,00	234°42′	89°00′
	D	86,58	348°10′	94°25′

È stato utilizzato uno strumento elettronico con graduazione destrorsa. Determinare l'area dell'appezzamento $ABCD$. [$S_{ABCD} = 15\,468{,}05$ m^2]

41 Di un appezzamento di terreno quadrilatero $ABCD$ si conoscono le coordinate cartesiane dei vertici A, B, C:

$X_A = -51{,}91$ m $\quad X_B = +105{,}03$ m
$Y_A = -87{,}11$ m $\quad Y_B = -119{,}87$ m

$X_C = +173{,}67$ m
$Y_C = -34{,}43$ m

Per determinare la posizione del vertice D si sono fatte due stazioni in A e C misurando gli elementi riportati nel seguente libretto:

Stazione	Punti battuti	Letture al C.O.
A	D	42^c,9230
	B	119^c,4780
C	B	384^c,6480
	D	71^c,9250

Lo strumento utilizzato è un teodolite elettronico centesimale con la graduazione dei cerchi destrorsa. Calcolare le coordinate del punto M d'intersezione delle diagonali AC e BD e l'area dell'appezzamento $ABCD$. [$X_M = +75{,}68$ m; $Y_M = -57{,}31$ m; $S_{ABCD} = 19\,975{,}30$ m^2]

Risultati dei quesiti vero/falso
1F, 2F, 3F, 4F, 5V, 6F, 7F, 8V, 9V, 10F.

Risultati dei quesiti a risposta multipla
21c, 22b, 23d, 24b, 25d, 26a, 27c, 28b, 29a, 30b.