Indicando con A' e B' le proiezioni sull'ellissoide terrestre di due punti A e B posti sulla superficie fisica della Terra, la linea di minore percorso che unisce le proiezioni A' e B' viene detta **linea geodetica** e la sua lunghezza rappresenta la **distanza geodetica** fra i punti A e B.

1.7 Determinazione dell'azimut di una direzione qualsiasi

Viene definito **angolo di direzione** quell'angolo, misurato in senso orario, che un allineamento SA forma con una direzione fissa a qualsiasi e prestabilita (fig. 1.15); se tale direzione coincide con quella del meridiano ed è diretta verso Nord, l'angolo viene detto **azimut**.

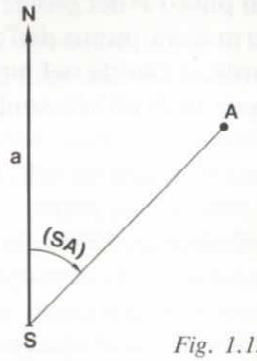

Fig. 1.15

È necessario pertanto individuare il meridiano, operazione che può essere svolta con il seguente procedimento, detto delle *altezze uguali*, per il quale viene usato un goniometro di precisione detto *universale geodetico* o più comunemente *teodolite* (fig. 1.16):

a) una stella T, nel suo moto apparente, descrive una curva, sulla quale il punto Z rappresenta il punto più alto;

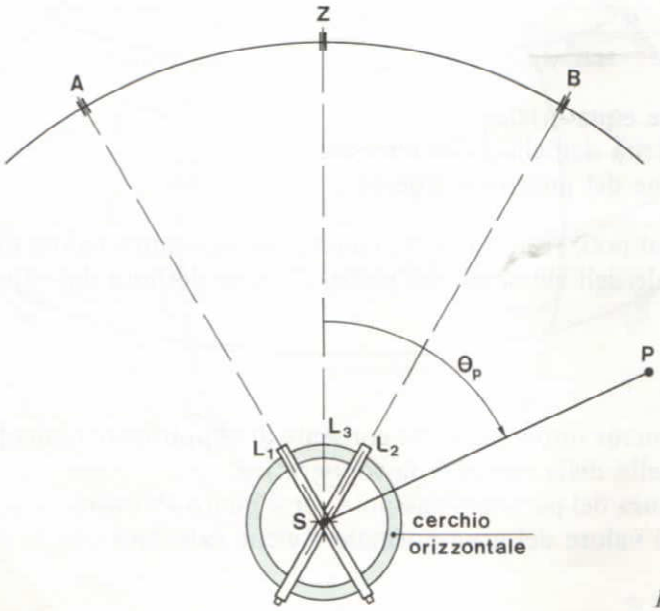

Fig. 1.16

b) messo in stazione lo strumento in S, si collima la stella T nella sua posizione A prima che questa raggiunga il suo punto più alto Z, si blocca il cannocchiale nella sua posizione sul piano verticale e si effettua la lettura della direzione azimutale L_1;

c) si ruota lo strumento attorno al suo asse di rotazione verticale sino a poter collimare alla medesima altezza, essendo il cannocchiale bloccato, la medesima stella T quando questa raggiunge la posizione B e si effettua la lettura della direzione azimutale L_2;

d) disponendo il cannocchiale in posizione tale da leggere sul cerchio orizzontale il valore:

$$L_3 = \frac{L_1 + L_2}{2}$$

si individua la direzione SZ che è quella del meridiano;

e) si collima quindi a un punto P del terreno, fisso e stabile, e si misura l'azimut θ, per cui sarà possibile in qualunque momento ritrovare la posizione del meridiano;

f) nel corso del procedimento descritto dovranno essere eliminati gli errori sistematici delle misure dovuti a svariate cause.

1.8 Quota ortometrica e quota dinamica

Se da un punto A della superficie fisica della Terra si conduce la normale all'ellissoide terrestre, questa individua sull'ellissoide stesso un punto A_0 che rappresenta la proiezione di A; le due coordinate geografiche di A_0 costituiscono le coordinate di A e ne individuano la posizione planimetrica (fig. 1.17).

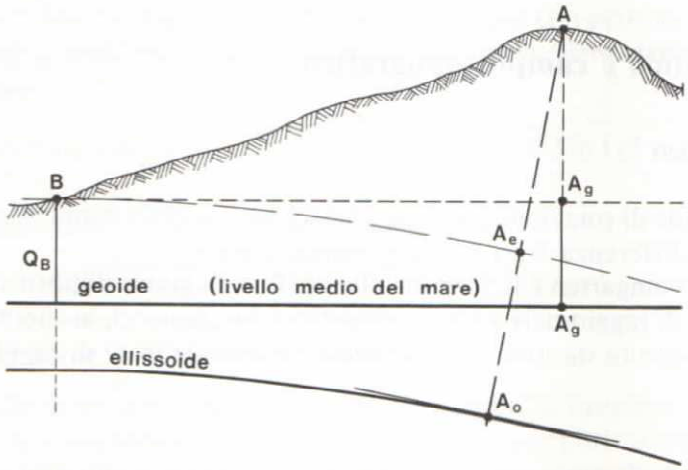

Fig. 1.17

La lunghezza del segmento AA_0 rappresenta la terza coordinata e viene definita **quota ellissoidica**.

Questa quota non viene usata per i seguenti motivi:

- non essendo possibile misurare le quote assolute dei punti, ossia le loro altezze rispetto alla superficie di riferimento, si misurano i dislivelli mediante strumenti che fanno riferimento alla verticale individuata dal filo a piombo, e quindi alla gravità, per cui viene misurato il segmento AA_g anziché il segmento AA_e, essendo A_e la proiezione di A rispetto a una superficie parallela all'ellissoide passante per un altro punto B della superficie terrestre;

- l'altezza dei dislivelli ellissoidici dipende dalla precisa conoscenza degli scostamenti fra geoide ed ellissoide, molto difficile da determinare;
- gli scostamenti fra le superfici del geoide e dell'ellissoide hanno una influenza trascurabile in planimetria, mentre producono errori non accettabili in altimetria;
- le quote dovrebbero essere misurate a partire da un unico punto del livello medio del mare per il quale passa il geoide, valido per tutta la Terra; non essendo questo possibile, ogni Nazione ha stabilito un punto che rappresenta il livello medio del mare, al quale è stata assegnata la quota zero (in Italia è nel porto di Genova).

Pertanto le quote vengono sempre riferite al geoide, e per il punto A considerato nella fig. 1.17 la quota è rappresentata dalla lunghezza del segmento di verticale AA_g e prende il nome di **quota ortometrica**.
Le **quote assolute** sono riferite al livello medio del mare ottenuto con i mareografi, e si calcolano sommando alle quote assolute note di alcuni punti i dislivelli, ossia le differenze di quota, rispetto ad altri punti. I dislivelli vengono determinati con operazioni topografiche dette livellazioni.
In sede internazionale è stata adottata la definizione di **quota dinamica**, rappresentata dalla differenza di potenziale della gravità esistente fra il geoide e il punto considerato, essendo la differenza di potenziale della gravità fra due superfici di livello il prodotto della forza di gravità su una superficie per la distanza fra le due superfici.
Dividendo per 1 000 la quota dinamica si ottiene la **quota geopotenziale** purché la gravità venga misurata in galileo (simbolo Gal), essendo:

$$1\ \text{Gal} = \frac{1}{10^2}\ \text{m/s}^2$$

1.9 Campo geodetico e campo topografico

1.9.1 Campo geodetico

Si è visto che l'ellissoide di rotazione presenta uno schiacciamento minimo, essendo di appena 11 km circa la differenza fra i suoi due semiassi a e c.
Gli studi di Puiseux-Weingarten e le formule alle quali sono giunti dimostrano che in una porzione di ellissoide di raggio pari a 100 km intorno a un punto O, la superficie di riferimento può essere sostituita da una sfera tangente l'ellissoide in O di raggio pari a:

$$R = \sqrt{\varrho_0 \cdot N_0}$$

In questa ipotesi l'errore planimetrico massimo è pari a 27 mm; alla distanza di 100 km si commette quindi un errore relativo pari a circa 10^{-9}. Poiché le più precise misure di distanza consentono di ottenere precisioni relative dell'ordine di 10^{-6} è giustificato considerare sfera ed ellissoide praticamente coincidenti nei limiti sopra descritti.
Pertanto risulta possibile, per una zona intorno a un punto A dell'ellissoide che si estende per un raggio di circa 100 km intorno al punto stesso, sostituire alla superficie ellissoidica la sfera tangente in A all'ellissoide; tale sfera prende il nome di **sfera locale** (fig. 1.18) e il suo raggio è:

$$R = \sqrt{\varrho \cdot N} = \frac{a \cdot \sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \cdot \text{sen}^2\,\varphi}$$

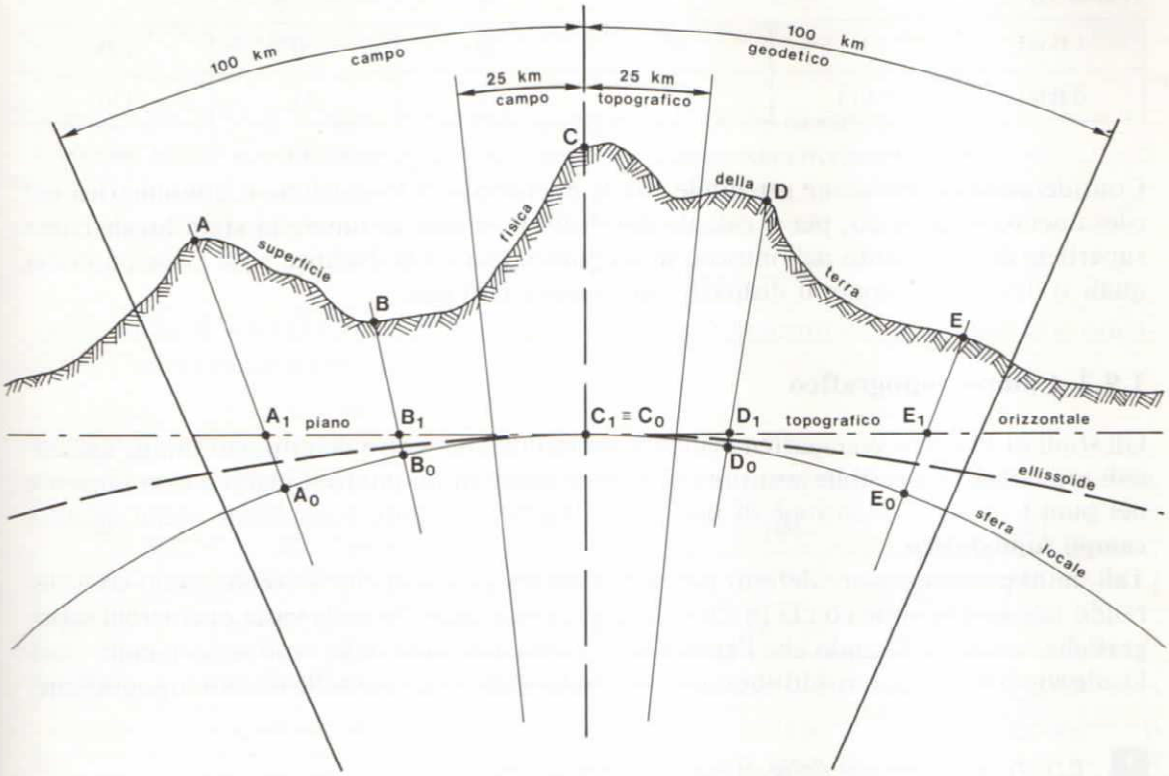

Fig. 1.18

Considerando l'aspetto planimetrico, la zona di terreno con profondità di 100 km, in cui è possibile sostituire all'ellissoide terrestre la sfera locale, viene definita **campo geodetico** o **di Weingarten**.

Il raggio medio della sfera locale per l'Italia risulta $R = 6\,376\,115$ m con le seguenti variazioni:

- Brennero: latitudine $\varphi = 47°$, $R = 6\,379\,850$ m;
- Torino-Piacenza: latitudine $\varphi = 45°$, $R = 6\,378\,350$ m;
- Roma: latitudine $\varphi = 42°$, $R = 6\,376\,100$ m;
- Siracusa: latitudine $\varphi = 37°$, $R = 6\,372\,430$ m.

Si hanno quindi tante sfere locali con raggio variabile in funzione della latitudine.
Il considerare la sfera locale comporta inoltre alcune semplificazioni nei calcoli analitici delle distanze; infatti una qualunque figura poligonale viene risolta applicando le relazioni della trigonometria sferica anziché quelle della trigonometria ellissoidica, notevolmente più complesse; al triangolo ellissoidico viene quindi sostituito il triangolo sferico.
In geodesia si considera il campo geodetico e per la rappresentazione di zone molto estese della superficie terrestre si assume come superficie di riferimento l'ellissoide, mentre i calcoli vengono svolti considerando la sfera locale delle varie zone considerate.
Prendendo invece in esame l'aspetto altimetrico dei punti sulla superficie fisica della Terra, e quindi i calcoli dei dislivelli, lo scostamento δ fra le superfici dell'ellissoide e della sfera locale aumenta in relazione alla distanza s fra i due punti considerati secondo i valori riportati in tab. 1.1.

Tabella 1.1

s [km]	1	10	20	50	100
δ [cm]	0,013	1,3	5,4	33	130

Considerando la precisione ottenibile con le operazioni di livellazione trigonometrica nel rilevamento altimetrico, per il calcolo dei dislivelli si può assumere la **sfera locale** come superficie di riferimento nell'intorno di un punto quando la distanza s fra i due punti dei quali si deve determinare il dislivello non supera i 20 km.

1.9.2 Campo topografico

Gli studi di Puiseux-Weingarten evidenziano inoltre che, entro determinati limiti, nei calcoli topografici è possibile sostituire alla sfera locale in un punto il piano a essa tangente nel punto stesso; l'estensione di tale piano intorno al punto considerato viene definita **campo topografico**.
Tali limiti possono essere definiti dal raffronto fra gli errori che si commettono considerando tale sostituzione con la precisione che si vuole ottenere nelle varie operazioni topografiche, ossia verificando che l'errore di sfericità derivante dalla sostituzione della sfera locale con il piano non risulti superiore alle tolleranze ammesse nelle misure topografiche.

1 *Errori nella misura delle distanze topografiche*

Immaginando di effettuare la sezione della sfera locale per i punti A e B della superficie terrestre, la verticale passante per B interseca in B_0 il piano tangente in A alla sfera locale (fig. 1.19).

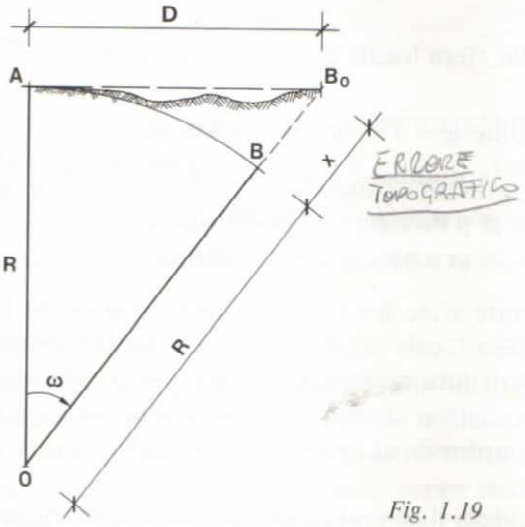

Fig. 1.19

Lo scostamento x fra la distanza piana $\overline{AB_0} = D$, misurata sul piano tangente di riferimento, e la distanza curvilinea $\widehat{AB} = S_v$, misurata sull'arco di circonferenza della sfera locale, può essere ricavato considerando il triangolo rettangolo AOB_0 e si ha:

$$D = \overline{AB_0} = R \cdot \operatorname{tg} \omega$$

$$S_v = \frac{\omega'' \cdot R}{206\,265''}$$

essendo 206 265″ la misura in secondi sessagesimali di un radiante.
L'errore totale e_t e unitario e_u che si commette è dato rispettivamente da:

$$e_t = D - S_v \qquad e_u = \frac{D - S_v}{S_v}$$

Assumendo $R = 6\,377\,000$ m, per valori gradualmente crescenti della distanza D si ottengono i valori riportati in tab. 1.2.

Tabella 1.2

S_v [m]	ω	D [m]	e_t [m]	e_u [m]
5 000	0°02′41″,725 7	5 000,005 72	0,005 72	1 : 868 000
10 000	0°05′23″,451 5	10 000,017 59	0,017 59	1 : 569 000
15 000	0°08′05″,177 20	15 000,041 75	0,041 75	1 : 359 000
20 000	0°10′46″,902 93	20 000,084 36	0,084 36	1 : 237 000
25 000	0°13′28″,628 67	25 000,151 56	0,151 56	1 : 165 000
30 000	0°16′10″,354 40	30 000,249 50	0,249 50	1 : 120 000
35 000	0°18′52″,080 13	35 000,384 32	0,384 32	1 : 91 000
40 000	0°21′33″,805 86	40 000,562 18	0,562 18	1 : 71 000
50 000	0°26′57″,257 33	50 001,071 60	1,071 60	1 : 47 000

Poiché la precisione relativa nelle misure topografiche di alta precisione è di circa 1 : 1 000 000, si può ritenere che in questo caso il campo topografico possa avere un raggio di 10 km intorno al punto A; nella grande maggioranza dei rilievi che vengono eseguiti è sufficiente raggiungere una precisione relativa di circa 1 : 200 000 per cui il limite del campo topografico nella misura delle distanze può essere esteso a un raggio di 25 km intorno al punto.

2 *Errori nella misura dei dislivelli*

Ricordando che la superficie del geoide gode della proprietà che la verticale in un punto qualsiasi è perpendicolare al piano tangente nel punto stesso, per cui, nel campo geodetico, tutte le verticali coincidono con le direzioni dei raggi della sfera locale, e quindi convergono tutte al centro della sfera stessa, nel campo topografico tutte le verticali sono parallele fra loro, essendo tutte perpendicolari al piano tangente alla sfera locale.
Consideriamo ancora la sezione della sfera locale passante per i punti A e B della superficie terrestre (fig. 1.19); detti punti, nel campo geodetico, appartengono alla medesima sfera locale e pertanto hanno la medesima quota, per cui il loro dislivello è nullo; nel campo topografico, il punto B, proiettato sul piano orizzontale tangente in A alla sfera locale

secondo la verticale geodetica, appare in B_0 e quindi rispetto alla sfera locale si ha il dislivello:

$$\Delta_{AB_0} = \overline{BB_0} = x$$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo OAB_0 si ottiene:

$$\overline{OA}^2 + \overline{AB_0}^2 = \overline{OB_0}^2$$

$$R^2 + D^2 = (R + x)^2$$

$$R^2 + D^2 = R^2 + 2 \cdot R \cdot x + x^2$$

e dividendo ambo i membri per $2 \cdot R$:

$$\frac{D^2}{2 \cdot R} = x + \frac{x^2}{2 \cdot R}$$

Il termine x è molto piccolo rispetto a $2 \cdot R$ e quindi la frazione $\frac{x^2}{2 \cdot R}$ può essere trascurata, per cui

$$\boxed{x = \frac{D^2}{2 \cdot R}}$$

che rappresenta l'errore di sfericità della Terra.
Per distanze D gradualmente crescenti e assumendo $R = 6\,377\,000$ m, l'errore x di sfericità che si commette nel calcolo dei dislivelli assume i valori riportati in tab. 1.3.

Tabella 1.3

D [m]	100	200	300	400	500	1 000
x [cm]	0,078 4	0,313 6	0,705 7	1,254 5	1,960 2	7,840 7

Ne consegue che nel calcolo dei dislivelli, volendo ottenere una precisione con tolleranza massima di errore inferiore al millimetro, il campo topografico può estendersi per un raggio non superiore a 100 m, mentre accettando una tolleranza intorno al centimetro, il campo topografico può estendersi per un raggio di poco inferiore a 400 m.

3 *Errori nel parallelismo delle verticali*

Considerando come superficie di riferimento il piano orizzontale, le verticali sono tutte parallele fra loro, mentre se si considera la sfera locale, tutte le verticali convergono al centro della sfera. L'errore nel parallelismo fra due verticali passanti per due punti qualsiasi A e B del geoide (fig. 1.19), rappresentato dall'angolo ω formato dalle verticali stesse, varia al variare della distanza fra i due punti, ossia dello sviluppo dell'arco di cerchio $\widehat{AB}$ sotteso dall'angolo ω.
Tale errore può essere calcolato con la relazione:

$$\omega'' = \frac{S_v}{R} \cdot 206\,265''$$

con la quale, assumendo $R = 6\,377\,000$ m e considerando distanze S_v gradualmente crescenti, si ottengono i valori riportati in tab. 1.4.

Tabella 1.4

S_v [m]	ω
100	03″,234 5
200	06″,469 0
500	16″,172 6
1 000	32″,345 1
2 000	01′04″,690 3
3 000	01′37″,035 4
5 000	02′41″,725 7
10 000	05′23″,451 5

Come appare dai risultati ottenuti, l'errore fra due verticali assume valori molto piccoli e comunque trascurabili considerando la sensibilità degli strumenti usati nelle operazioni topografiche, che in genere è prossima ai 5′.

4 *Errori nella misura degli angoli azimutali*

Nell'ambito del campo geodetico, il triangolo ellissoidico può essere sostituito con il triangolo sferico; quest'ultimo presenta lati con lunghezza l molto piccola rispetto al raggio R della sfera locale e con un errore dell'ordine di $\left(\frac{l}{R}\right)^4$ è possibile risolvere il triangolo sferico con le formule della trigonometria piana. Il teorema di Legendre (fig. 1.20) afferma che la somma degli angoli di un triangolo sferico è superiore all'angolo piatto di una quantità ε, detta **eccesso sferico**. Tale quantità si calcola con la relazione:

$$\varepsilon = \frac{S}{R^2}$$

dove: S = area del triangolo sferico;
R = raggio della sfera alla quale appartiene il triangolo.

L'area S può essere calcolata applicando il teorema di Cavalieri: *l'area del triangolo sferico è uguale alla metà dell'area del fuso sferico che ha per ampiezza l'eccesso sferico del triangolo.*

Indicando con S l'area del triangolo sferico ABC, è $2 \cdot S$ quella del fuso sferico (delimitato da due piani meridiani), ed essendo $4 \cdot \pi \cdot R^2$ l'area della sfera, per la proporzionalità fra le aree dei fusi sferici e i corrispondenti angoli quadri si ha:

$$4 \cdot \pi \cdot R^2 : 2 \cdot S = 2 \cdot \pi : \varepsilon$$

da cui:

$$\varepsilon = \frac{4 \cdot S \cdot \pi}{4 \cdot \pi \cdot R^2}$$

dove: R = raggio della sfera locale = 6 377 000 m.

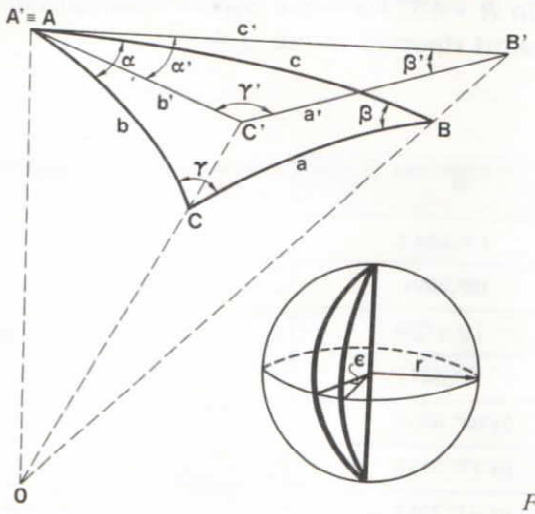

Fig. 1.20

Si ha quindi:

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi+\varepsilon$$

Il teorema di Legendre può essere così enunciato: *dato un triangolo sferico* ABC *i cui lati l siano una piccola frazione del raggio* R *della sfera locale, l'ampiezza degli angoli del triangolo piano* A′B′C′ *che ha i lati con la stessa lunghezza di quelli del triangolo sferico si può derivare dall'ampiezza degli angoli del triangolo sferico sottraendo a ognuno di essi un terzo dell'eccesso sferico*, cioè

$$\alpha'=\alpha-\frac{\varepsilon}{3} \qquad \beta'=\beta-\frac{\varepsilon}{3} \qquad \gamma'=\gamma-\frac{\varepsilon}{3}$$

commettendo un errore dell'ordine di $\left(\frac{l}{R}\right)^4$.

Se i lati del triangolo sferico hanno lunghezza non superiore a 15 km, questo teorema può anche non essere applicato in quanto l'eccesso sferico in tale caso assume un valore di 0″,516 circa, inferiore all'approssimazione con cui vengono effettuate le misure degli angoli.
L'errore nella misura degli angoli azimutali dipende dal valore dell'eccesso sferico e quindi dall'area S del triangolo sferico, ossia, nei limiti di validità del teorema di Legendre, dalla correzione che si deve apportare agli angoli del triangolo sferico per poterlo considerare un triangolo piano al quale si possono applicare le relazioni della trigonometria piana.
Applicando il teorema di Cavalieri e tenendo presente che i lati del triangolo sferico sono molto piccoli rispetto a R, per cui si può considerarlo equilatero con lato l, per valori gradualmente crescenti di l si sono ricavati i valori dell'eccesso sferico riportati in tab. 1.5.
Pertanto l'estensione di 25 km del campo topografico, assunta nella misura delle distanze, può essere considerata anche nella misura degli angoli orizzontali, risultando che in questo caso l'eccesso sferico di ciascun angolo avrebbe un valore $\varepsilon''/3 = 0'',457\,564$ e quindi praticamente trascurabile.
Se si impone che $\left(\frac{l}{R}\right)^4$ sia inferiore a 10^{-6} (precisione raggiungibile nella misura di distanze) si ottiene che la lunghezza dei lati l deve essere minore di 200 km.
Questo significa che il teorema di Legendre può essere applicato in tutto il campo geodetico evitando così il ricorso all'uso della trigonometria sferica.

Tabella 1.5

l [km]	S [m²]	ε''	$\frac{\varepsilon''}{3}$
1	0,433 0	0″,002 196	0″,000 732
5	10,825 3	0″,054 908	0″,018 303
10	43,301 3	0″,219 631	0″,073 210
15	97,427 9	0″,494 169	0″,164 723
20	173,205 1	0″,878 523	0″,292 841
30	389,711 4	1″,976 678	0″,658 893
40	692,820 3	3″,514 094	1″,171 365
50	1 082,531 8	5″,490 771	1″,830 257

1.10 Grandezze topografiche

Gli strumenti impiegati per la misurazione degli angoli vengono detti **goniometri**, il più classico dei quali è il *teodolite*; lo studio approfondito di tali strumenti verrà effettuato nel cap. 16: qui si procederà solo a un loro esame sommario, necessario per comprendere il significato della terminologia usata.

Un goniometro è costituito dalle seguenti parti essenziali (fig. 1.21):

- **basamento**: costituito di tre razze poste a 120°, all'estremità di ognuna delle quali si ha una vite di elevazione, mentre all'altra estremità vi è un perno che consente di fissare lo strumento al treppiede mediante una grossa vite;
- **cerchio graduato orizzontale o azimutale**, che può essere libero oppure fissato al basamento;
- **cerchio graduato verticale o zenitale**: montato a lato del cannocchiale;

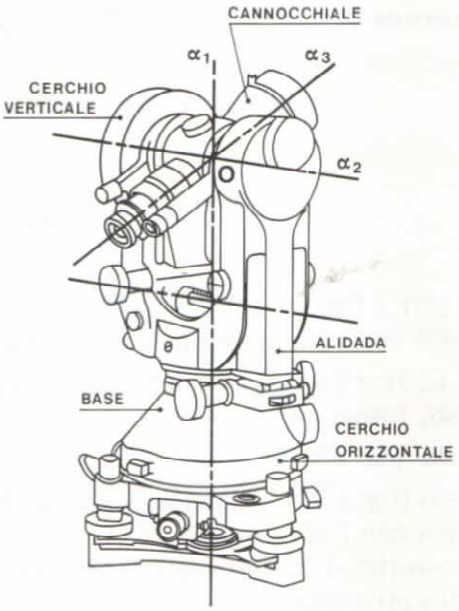

Fig. 1.21

- **cannocchiale**: può ruotare in un piano verticale attorno all'asse secondario e in uno orizzontale attorno all'asse principale; tramite il suo asse di collimazione si può traguardare, ossia collimare un punto visibile;
- **alidada**: è la parte dello strumento girevole attorno all'asse principale α_1; è un elemento a **U** sul quale sono montati il cerchio verticale e il cannocchiale.

Mettere in stazione lo strumento significa disporre verticale il suo asse principale, facendo in modo che questo passi per il punto di stazione a terra *S*; inoltre devono essere verificate le seguenti condizioni:

- l'asse secondario α_2 deve essere orizzontale e quindi perpendicolare al principale α_1;
- l'asse di collimazione α_3 deve essere perpendicolare al secondario;
- i tre assi principale, secondario e di collimazione devono intersecarsi in un punto coincidente con il centro *O* dello strumento.

Potendo il cannocchiale ruotare orizzontalmente, tramite l'alidada, e verticalmente, nella collimazione a un punto generico *A* si ha la possibilità di misurare angoli orizzontali e verticali di vario tipo e precisamente:

- *angolo azimutale* (*SA*) (fig. 1.22): è l'angolo orizzontale, definito dalla sezione normale dell'angolo diedro formato dai piani verticali aventi in comune la verticale passante per il vertice *S* dell'angolo;

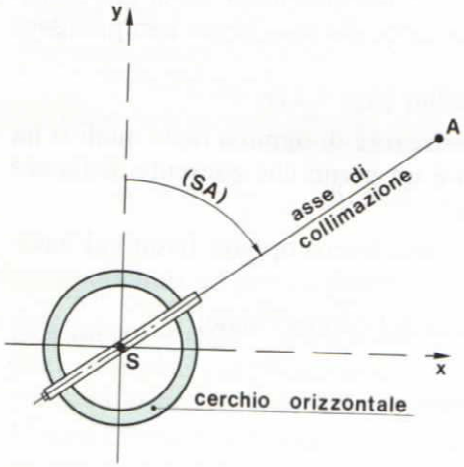

Fig. 1.22

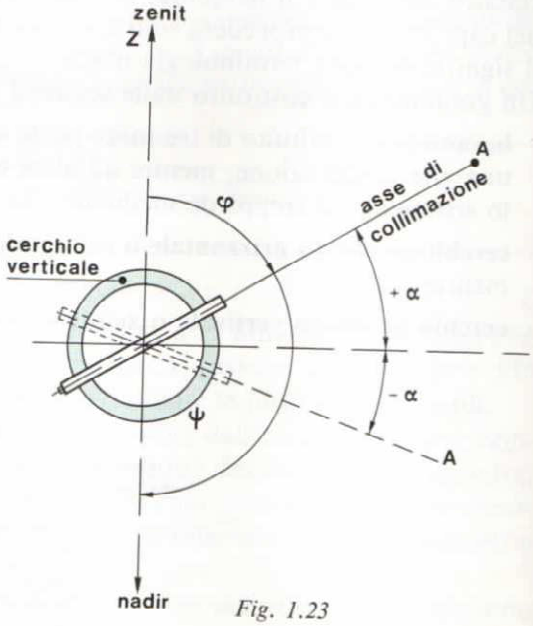

Fig. 1.23

- *angolo zenitale* φ (fig. 1.23): è l'angolo verticale che l'asse principale *z* dello strumento, diretto verso lo zenit, cioè verso l'alto, forma con l'asse di collimazione;
- *angolo nadirale* ψ (fig. 1.23): è l'angolo verticale che l'asse principale, diretto verso il nadir, cioè verso il basso, forma con l'asse di collimazione;
- angolo di inclinazione che può essere:
  - *angolo di elevazione* $+\alpha$ (fig. 1.23): è l'angolo verticale che l'asse di collimazione, diretto verso l'alto, forma con l'orizzontale;
  - *angolo di depressione* $-\alpha$ (fig. 1.23): è l'angolo che l'asse di collimazione, diretto verso il basso, forma con l'orizzontale.

Le altre grandezze topografiche sono la *distanza* e il *dislivello*.
Per **distanza topografica** D fra due punti A e B sulla superficie terrestre si intende la lunghezza del segmento avente per estremi le loro proiezioni A' e B' sulla superficie di riferimento (nel nostro caso un piano orizzontale) (fig. 1.24).

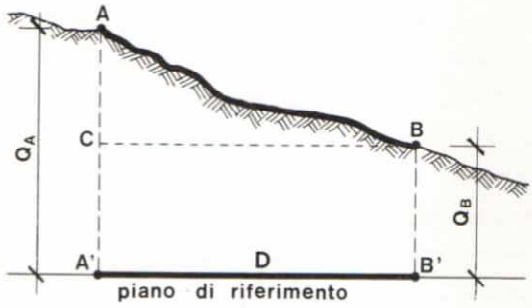

Fig. 1.24

Se i punti A e B si trovano ad altezze differenti rispetto al piano di riferimento, la distanza reale $\overline{AB}$ fra i due punti sul terreno è diversa dalla distanza topografica $\overline{A'B'}$; però può essere ricavata da quest'ultima applicando il teorema di Pitagora al triangolo ABC, essendo AC la differenza fra le quote dei due punti. La distanza topografica, così come è stata prima definita, può a prima vista sembrare poco realistica; a parte la necessità di operare in base a una convenzione generale che consente il raffronto fra distanze di punti giacenti ad altezze differenti, il concetto di distanza topografica trova il suo reale riscontro nella utilizzazione del terreno, sia a livello agricolo (un terreno in pendenza può essere meno sfruttato rispetto a uno in pianura), sia nel campo edilizio dove la superficie coperta della costruzione è orizzontale.
Con il termine **dislivello** si intende la differenza di quote tra due punti: convenzionalmente si indica con il simbolo Δ e il significato fisico è espresso dalla relazione:

$$\Delta_{AB} = Q_B - Q_A$$

dove Q_B e Q_A rappresentano i valori delle quote dei due punti considerati.