1 Sistema di misura - Richiami di geometria analitica

1.1 Il Sistema Internazionale di unità di misura (SI)

Allo scopo di uniformare e razionalizzare il campo delle unità di misura, dopo lunghi anni di studi e ricerche, nel 1960, alla XI Conferenza Generale dei Pesi e Misure, tutte le nazioni partecipanti adottarono formalmente il Sistema Internazionale di Unità (SI).
Con la Direttiva del Consiglio CEE in data 18 ottobre 1971 n. 71/354/CEE, modificata con Direttiva dello stesso Consiglio in data 27 luglio 1976, n. 76/770/CEE, veniva stabilita l'adozione obbligatoria entro il 21 aprile 1978 da parte di tutti gli Stati membri, e quindi anche dell'Italia, del Sistema Internazionale di unità di misura, detto comunemente Sistema SI.
Successivamente il Consiglio delle Comunità Europee in data 20 dicembre 1979 emenava la Direttiva n. 80/181 per il riavvicinamento delle legislazioni degli Stati membri relative alle unità di misura.
Il D.P.R. 12 agosto 1982, n. 302 «Attuazione della direttiva CEE n. 80/181 relativa alle unità di misura», entrato in vigore il giorno successivo a quello della sua pubblicazione sulla G.U. 3 novembre 1982 n. 303, riporta nell'allegato «le unità di misura legali da utilizzare per esprimere grandezze» e precisa che «si devono usare esclusivamente le denominazioni e i simboli previsti nell'allegato».
A parziale modifica di quanto contenuto nel citato D.P.R., con Decreto Min. Ind. 30 dicembre 1989, fino al 31 dicembre 1999 è ammesso l'impiego di indicazioni plurime, costituite dall'indicazione predominante delle unità di misura SI, accompagnata da indicazioni espresse con unità differenti riportate con carattere di grandezza inferiore o al limite uguale a quelle delle unità SI.
Per quanto attiene il campo delle operazioni topografiche le grandezze fondamentali, supplementari e derivate, e le relative unità di misura sono riportate nella tab. 1.1 che segue.
Nella successiva tab. 1.2 sono riportate alcune unità SI che interessano il campo topografico, con alcuni loro multipli e sottomultipli e le unità non SI ammesse.
La norma CNR-UNI 10003/84 riporta le regole di scrittura da applicare in modo da evitare errori ed equivoci; le principali sono:

- i nomi di tutte le unità SI, dei loro multipli e sottomultipli sono nomi comuni e devono avere l'iniziale minuscola;
- i nomi di tutte le unità SI sono invariabili al plurale, eccetto il metro, il kilogrammo, il secondo, la candela, la mole, il radiante, lo steradiante e tutte le unità derivate in cui essi compaiono;

Tabella 1.1

Grandezza	Unità SI		
	Nome	Simbolo	Definizione
			Fondamentali
Lunghezza	metro	m	Lunghezza del tragitto compiuto dalla luce nel vuoto in un intervallo di tempo di 1/299 792 458 di secondo.
Massa	kilogrammo	kg	Massa del prototipo internazionale conservato al Pavillon de Breteuil (Sèvres).
Tempo	secondo	s	Intervallo di tempo che contiene 9 192 631 770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione fra due livelli iperfini dello stato fondamentale del cesio 133.
Intensità luminosa	candela	cd	Intensità luminosa emessa perpendicolarmente dal foro di un corpo nero di Burgess in condizioni particolari ($T = 2\,045$ K; $P = 101\,325$ Pa; diametro del foro = 1/600 000 m^2).
Temperatura termodinamica	kelvin	K	Frazione di 1/273,16 della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua.
			Supplementari
Angolo piano	radiante	rad	Angolo piano al centro che su una circonferenza intercetta un arco di lunghezza uguale a quella del raggio.
Angolo solido	steradiante	sr	Angolo solido al centro che su una sfera intercetta una calotta di area uguale a quella del quadrato il cui lato ha la lunghezza del raggio.
			Derivate
Frequenza	hertz	Hz	Frequenza di un fenomeno periodico il cui periodo è di 1 s: $1\ \text{Hz} = 1\ \text{s}^{-1}$
Forza	newton	N	Forza che imprime a un corpo con massa 1 kg l'accelerazione di 1 m/s^2: $1\ \text{N} = 1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$
Pressione	pascal	Pa	Pressione esercitata dalla forza di 1 N applicata perpendicolarmente a una superficie di area 1 m^2: $1\ \text{Pa} = 1\ \text{N/m}^2$
Illuminamento	lux	lx	Illuminamento prodotto dal flusso luminoso emesso da una sorgente di 1 cd nell'angolo solido di 1 sr e ripartito in modo uniforme su una superficie con area 1 m^2: $1\ \text{lx} = 1\ \text{cd} \cdot \text{sr/m}^2$
			Denominazione speciale dell'unità SI di temperatura nel caso della temperatura Celsius
Temperatura	grado Celsius	°C	La temperatura Celsius t è definita dalla differenza $t = T - T_0$ tra due temperature termodinamiche T e T_0 con $T_0 = 273{,}16$ K.

- i simboli delle unità SI devono essere scritti sempre dopo il valore numerico che rappresenta la misura;
- non si devono usare prefissi composti;
- l'unità, se accompagna la relativa misura, è espressa di regola con il suo simbolo;
- l'unità, se non accompagna la relativa misura, deve essere espressa con il suo nome e non con il simbolo.

Tabella 1.2

Grandezza	Unità SI	Multipli e sottomultipli più comuni delle unità SI	Unità non SI ammesse	
			Nome	Simbolo
Angolo piano	rad (radiante)	milliradiante mrad $1\ \text{mrad} = 1\ \text{rad} \cdot 10^{-3}$ microradiante μrad $1\ \mu\text{rad} = 1\ \text{rad} \cdot 10^{-6}$	grado sessagesimale $1° = \frac{\pi}{180}$ rad minuto di angolo $1' = \frac{1°}{60}$ secondo di angolo $1'' = \frac{1'}{60}$ grado centesimale ovvero gon $1\ \text{gon} = \frac{\pi}{200}$ rad giro $1\ \text{giro} = 2\pi$ rad	° ' "
Area	m^2	km^2 dm^2 cm^2 mm^2	ettaro $1\ \text{ha} = 10\,000\ m^2$ ara $1\ \text{a} = 100\ m^2$	ha a
Volume	m^3	dm^3 cm^3 mm^3	litro $1\ \text{l} = 1\ dm^3$	l oppure L
Tempo	s (secondo)	kilosecondo ks $1\ \text{ks} = 1\,000$ s millisecondo ms $1\ \text{ms} = 1 \cdot 10^{-3}$ s microsecondo μs $1\ \mu\text{s} = 1 \cdot 10^{-6}$ s nanosecondo ns $1\ \text{ns} = 1 \cdot 10^{-9}$ s	giorno $1\ \text{d} = 24\ \text{h} = 86\,400$ s ora $1\ \text{h} = 60\ \text{min} = 3\,600$ s minuto $1\ \text{min} = 60$ s	d h min
Velocità	m/s	km/s mm/s	kilometro all'ora $1\ \text{km/h} = \frac{1}{3{,}6}$ m/s metro al minuto $1\ \text{m/min} = \frac{1}{60}$ m/s	km/h m/min
Forza peso	N (newton)	meganewton MN $1\ \text{MN} = 1 \cdot 10^6$ N kilonewton kN $1\ \text{kN} = 1 \cdot 10^3$ N		
Pressione e tensione	Pa (pascal)	megapascal MPa $1\ \text{MPa} = 1\ \text{N/mm}^2$	bar (usato per la pressione dei fluidi) $1\ \text{bar} = 10^5$ Pa millibar $1\ \text{mbar} = 10^2$ Pa	mbar

1.2 Richiami di geometria analitica

La trigonometria fornisce formule e relazioni che permettono la soluzione di problemi geometrici nel piano; questi ultimi però in molti casi possono essere risolti con maggiore rapidità e uguale precisione integrando i procedimenti trigonometrici con quelli della geometria analitica nel piano.
Si ritiene pertanto utile effettuare un richiamo di questa materia, limitatamente a quegli argomenti che trovano più frequente applicazione nel campo topografico.

1.2.1 Il punto

Come già si è visto nel vol. 1, la posizione di un punto A nel piano viene determinata dalle sue coordinate x_A (ascissa) e y_A (ordinata), che vengono solitamente riferite a un sistema di assi cartesiani ortogonali X e Y che si intersecano nel punto O detto origine; per esempio il punto M viene definito con la notazione $M \equiv (5, -2)$, dove il primo numero rappresenta sempre l'ascissa x e il secondo l'ordinata y (fig. 1.1).

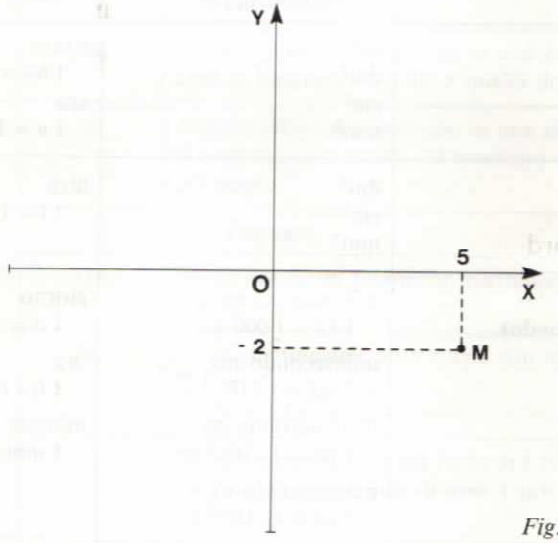

Fig. 1.1

1 *Distanza fra due punti*

La distanza fra due punti $A \equiv (x_A, y_A)$ e $B \equiv (x_B, y_B)$, ossia la lunghezza del segmento $\overline{AB}$, si calcola applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ABC (fig. 1.2):

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2}$$

ed essendo:

$$\overline{AC} = x_B - x_A \qquad \overline{BC} = y_B - y_A$$

sostituendo si ottiene:

$$\boxed{\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} \qquad [1]$$

Nella [1] le coordinate dei punti devono essere sostituite con il loro segno.

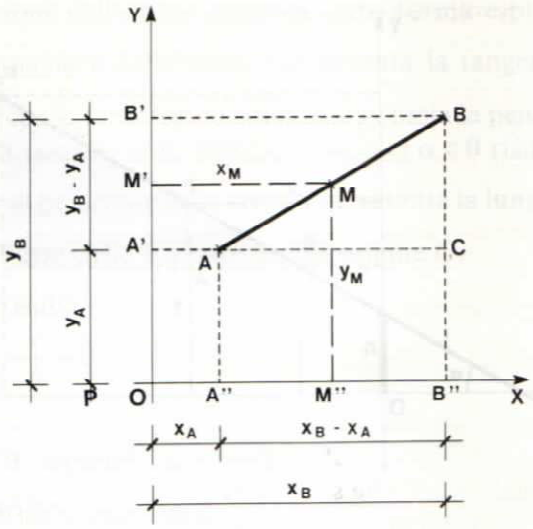

Fig. 1.2

2 *Punto medio di un segmento*

Sia M il punto medio del segmento avente per estremi i punti $A \equiv (x_A, y_A)$ e $B \equiv (x_B, y_B)$, per cui risulta (fig. 1.2):

$$\overline{AM} = \overline{MB}$$

Per il teorema di Talete si ha:

$$\overline{A''M''} = \overline{M''B''} \qquad \overline{A'M'} = \overline{M'B'}$$

e considerando le coordinate dei punti A e B:

$$x_M - x_A = x_B - x_M \qquad y_M - y_A = y_B - y_M$$

da cui:

$$2 \cdot x_M = x_A + x_B \qquad 2 \cdot y_M = y_A + y_B$$

e infine:

$$\boxed{x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}} \qquad [2]$$

1.2.2 La retta

1 *Retta generica*

Si consideri una retta generica r passante per i due punti:

$$P_1 \equiv (x_1, y_1) \qquad P_2 \equiv (x_2, y_2)$$

e sia $P \equiv (x, y)$ un punto qualsiasi su di essa (fig. 1.3).
Essendo simili i triangoli P_1AP e P_1BP_2 si ha:

$$\overline{P_1A} : \overline{P_1B} = \overline{PA} : \overline{P_2B}$$

e considerando le coordinate:

$$(x - x_1) : (x_2 - x_1) = (y - y_1) : (y_2 - y_1)$$

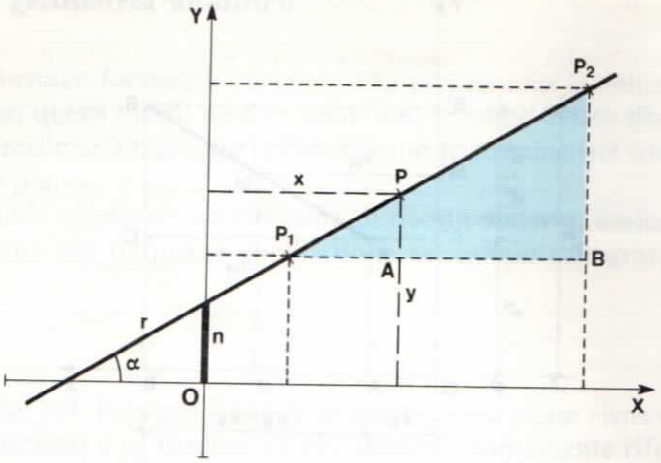

Fig. 1.3

Moltiplicando fra loro i medi e gli estremi, risolvendo e riducendo si ottiene:

$$x \cdot y_2 - x \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2 + \cancel{x_1 \cdot y_1} = x_2 \cdot y - x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y + \cancel{x_1 \cdot y_1}$$
$$x \cdot y_2 - x \cdot y_1 + x_1 \cdot y - x_2 \cdot y - x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1 = 0$$
$$x \cdot (y_2 - y_1) + y \cdot (x_1 - x_2) + (x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2) = 0$$

Ponendo:

$$y_2 - y_1 = a$$
$$x_1 - x_2 = b$$
$$x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2 = c$$

si ottiene:

$$\boxed{a \cdot x + b \cdot y + c = 0} \qquad [3]$$

Pertanto ogni equazione di primo grado nelle due variabili x e y rappresenta sempre una retta.
La [3] rappresenta l'equazione di una retta generica in forma implicita; dividendola per b si ha:

$$\frac{a}{b} \cdot x + y + \frac{c}{b} = 0$$

da cui:

$$y = -\frac{a}{b} \cdot x - \frac{c}{b} \qquad [4]$$

Ponendo:

$$-\frac{a}{b} = m \qquad -\frac{c}{b} = n$$

la [4] diventa:

$$\boxed{y = m \cdot x + n} \qquad [5]$$

che rappresenta l'equazione della retta generica sotto forma esplicita nella quale:

a) $m = \frac{a}{b}$: coefficiente angolare della retta, rappresenta la tangente trigonometrica dell'angolo antiorario α che la retta forma con l'asse x, ossia la pendenza della retta stessa; se $m = \operatorname{tg}\alpha > 0$ risulta $\alpha < 100$ gon, mentre se $m = \operatorname{tg}\alpha < 0$ risulta $\alpha > 100$ gon;

b) $n = -\frac{c}{b}$: coefficiente di posizione della retta, rappresenta la lunghezza del segmento che la retta intercetta sull'asse delle y a partire dall'origine O.

Se nella [3] o nella [5] risulta:

a) $c = 0$ oppure $n = -\frac{c}{b} = 0$

per cui:

$$a \cdot x + b \cdot y = 0 \quad \text{oppure} \quad y = m \cdot x$$

la retta passa per l'origine degli assi;

b) $b = 0$ oppure $m = -\frac{a}{b} = \infty$

per cui:

$$a \cdot x + c = 0 \quad \text{oppure} \quad x = -\frac{c}{a}$$

la retta è parallela all'asse Y;

c) $a = 0$ oppure $m = -\frac{a}{b} = 0$

per cui:

$$b \cdot y + c = 0 \quad \text{oppure} \quad y = -\frac{c}{b} = n$$

la retta è parallela all'asse X;

d) $a = c = 0$ oppure $m = n = 0$

per cui:

$$y = 0$$

la retta coincide con l'asse X;

e) $b = c = 0$ oppure $m = \infty$ e $n = 0$

per cui:

$$x = 0$$

la retta coincide con l'asse Y.

2 *Rette parallele*

Date due rette r e s di equazioni:

$$a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = 0 \qquad a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = 0$$

oppure:

$$y = m_1 \cdot x + n_1 \qquad y = m_2 \cdot x + n_2$$

affinché risultino parallele è necessario che formino il medesimo angolo α (in valore e

segno) con l'asse X e quindi devono presentare il medesimo coefficiente angolare; deve quindi essere:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \quad \text{oppure} \quad m_1 = m_2$$

3 *Rette perpendicolari*

Siano r e s due rette fra loro perpendicolari (fig. 1.4) con equazioni in forma esplicita:

$$y = m_1 \cdot x + n \qquad y = m_2 \cdot x + n$$

aventi in comune il punto C sull'asse Y, per il quale si traccia l'asse secondario X' parallelo a X.

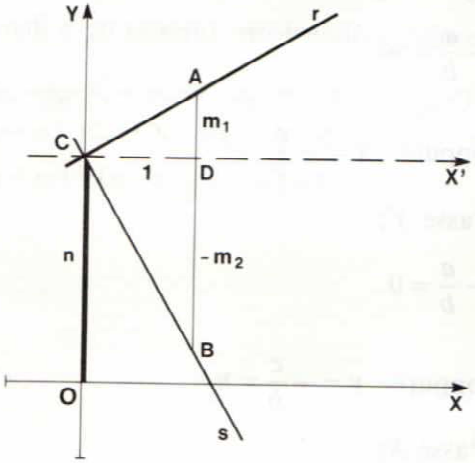

Fig. 1.4

Consideriamo sulle rette r e s due punti A e B, entrambi con $x_A = x_B = \overline{CD} = 1$, mentre $y_A = m_1$ e $y_B = m_2$; applicando il 2° teorema di Euclide al triangolo rettangolo ABC si ha:

$$m_1 : 1 = 1 : (-m_2)$$

da cui:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

ossia:

$$\boxed{m_2 = -\frac{1}{m_1}} \qquad [6]$$

oppure:

$$\boxed{\frac{a_2}{b_2} = -\frac{b_1}{a_1}} \qquad [7]$$

Pertanto due rette sono perpendicolari quando il coefficiente angolare di una è uguale all'opposto del reciproco del coefficiente angolare dell'altra.

4 *Retta passante per un punto*

Consideriamo l'equazione esplicita della retta:

$$y = m \cdot x + n \qquad [8]$$

Se tale retta deve passare per il punto $P_1 \equiv (x_1, y_1)$, le coordinate di quest'ultimo devono soddisfare l'equazione della retta, cioè:

$$y_1 = m \cdot x_1 + n \qquad [9]$$

Sottraendo la [9] dalla [8] si ottiene:

$$\boxed{y - y_1 = m \cdot (x - x_1)} \qquad [10]$$

che rappresenta l'equazione di una delle infinite rette passanti per P_1.

Dalla [10] si ha: $m = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$. [11]

5 *Retta passante per due punti*

I punti $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ e $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ devono appartenere alla medesima retta e pertanto devono soddisfare la sua equazione, ossia deve risultare:

$$y_1 = m \cdot x_1 + n$$

$$y_2 = m \cdot x_2 + n$$

Sottraendo la seconda dalla prima si ottiene:

$$y_2 - y_1 = m \cdot (x_2 - x_1)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

e ricordando la [11] si ha:

$$\boxed{\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}} \qquad [12]$$

che rappresenta l'equazione della retta passante per due punti.

6 *Angolo formato da due rette*

Siano r e s due rette di equazioni:

$$y = m_1 \cdot x + n_1 \qquad y = m_2 \cdot x + n_2$$

che formano rispettivamente gli angoli α_1 e α_2 con il semiasse positivo delle ascisse (fig. 1.5).

L'angolo ω formato dalle due rette risulta:

$$\omega = \alpha_2 - \alpha_1$$

Ricordando le formule trigonometriche di sottrazione si ha:

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2}$$

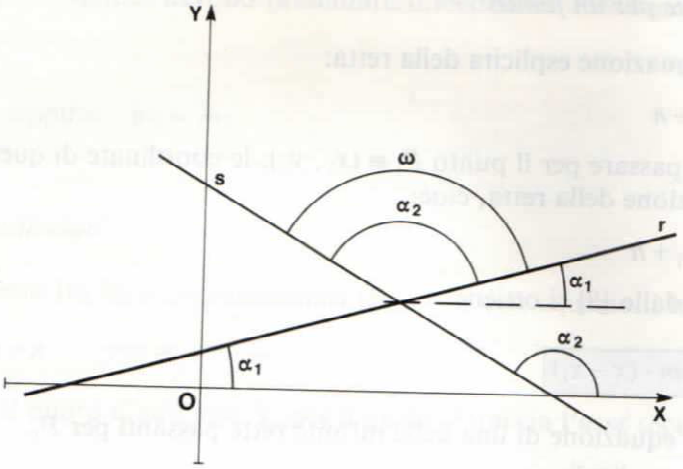

Fig. 1.5

ed essendo:

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = m_2 \qquad \operatorname{tg}\alpha_1 = m_1$$

risulta:

$$\boxed{\omega = \operatorname{arctg}\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}} \qquad [13]$$

Se le equazioni sono sotto forma implicita, la [13] diventa:

$$\boxed{\omega = \operatorname{arctg}\frac{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}{a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2}} \qquad [14]$$

7 *Coordinate del baricentro di un triangolo*

Siano $P_1 \equiv (x_1, y_1)$, $P_2 \equiv (x_2, y_2)$, $P_3 \equiv (x_3, y_3)$ i vertici di un triangolo (fig. 1.6). Ricordando che il baricentro G di un triangolo è dato dall'intersezione delle mediane, il

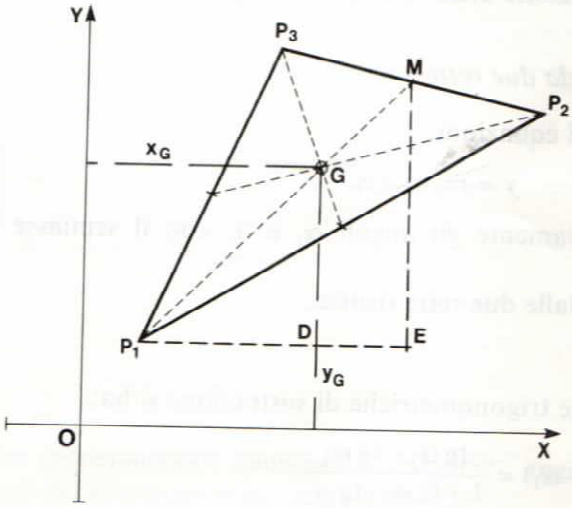

Fig. 1.6

punto di intersezione delle mediane divide queste in due parti proporzionali ai numeri 1 e 2; risulta quindi:

$$\overline{P_2M} = \overline{P_3M} \qquad \overline{P_1G} = \frac{2}{3} \cdot \overline{P_1M}$$

Le coordinate del punto M valgono:

$$x_M = \frac{x_2 + x_3}{2} \qquad y_M = \frac{y_2 + y_3}{2}$$

Con le notazioni di fig. 1.6 si ha:

$$\overline{P_1D} = \frac{2}{3} \cdot \overline{P_1E} = \frac{2}{3} \cdot (x_M - x_1)$$

$$\overline{DG} = \frac{2}{3} \cdot \overline{ME} = \frac{2}{3} \cdot (y_M - y_1)$$

Segue che:

$$x_G = x_1 + \overline{P_1D} = x_1 + \frac{2}{3} \cdot (x_M - x_1) =$$

$$= x_1 + \frac{\cancel{2}}{3} \cdot \frac{x_2 + x_3}{\cancel{2}} - \frac{2}{3} \cdot x_1 =$$

$$= \frac{3 \cdot x_1 + x_2 + x_3 - 2 \cdot x_1}{3}$$

ossia:

$$\boxed{x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}} \qquad [15]$$

Analogamente si ricava:

$$y_G = y_1 + \overline{DG} = y_1 + \frac{2}{3} \cdot (y_M - y_1)$$

Sostituendo e riducendo risulta:

$$\boxed{y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}} \qquad [16]$$

8 *Problema di intersezione*

Le coordinate del punto di intersezione, se esiste, di due rette sono espresse dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} y = m_1 \cdot x + n_1 \\ y = m_2 \cdot x + n_2 \end{cases}$$

1.2.3 La circonferenza

Sia $C \equiv (\alpha, \beta)$ il centro di una circonferenza e $P \equiv (x, y)$ un suo punto qualsiasi; applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo PAC si ha (fig. 1.7):

$$\overline{CA}^2 + \overline{PA}^2 = \overline{PC}^2$$

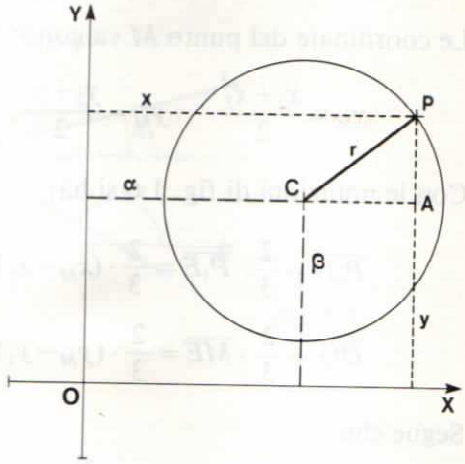

Fig. 1.7

Dato che:

$$\overline{PC} = r$$
$$\overline{CA} = x - \alpha$$
$$\overline{PA} = y - \beta$$

sostituendo si ha:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

Sviluppando risulta:

$$x^2 - 2 \cdot \alpha \cdot x + \alpha^2 + y^2 - 2 \cdot \beta \cdot y + \beta^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 - 2 \cdot \alpha \cdot x - 2 \cdot \beta \cdot y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

Ponendo:

$$a = -2 \cdot \alpha$$
$$b = -2 \cdot \beta$$
$$\alpha^2 + \beta^2 - r^2 = c$$

si ottiene:

$$\boxed{x^2 + y^2 + a \cdot x + b \cdot y + c = 0} \qquad [17]$$

che rappresenta l'equazione della circonferenza con centro nel punto C e raggio r.
Se nella [17] risulta:

a) $a = 0$ e quindi $\alpha = 0$

la circonferenza ha il centro C sull'asse Y;

b) $b = 0$ e quindi $\beta = 0$

la circonferenza ha il centro C sull'asse X;

c) $c = 0$ e quindi $r^2 = \alpha^2 + \beta^2$

la circonferenza passa per l'origine O degli assi;

d) $|\alpha| = |\beta| = r$

la circonferenza è tangente agli assi cartesiani;

e) $a = b = 0$ e quindi $\alpha = \beta = 0$

la circonferenza ha il centro C coincidente con l'origine degli assi cartesiani e la [17] diventa:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

1.2.4 Problemi di intersezione

Le coordinate dei punti di intersezione di una retta con una circonferenza oppure di due circonferenze si ottengono risolvendo il sistema formato dalle equazioni della retta e della circonferenza, oppure delle due circonferenze.
Il discriminante dell'equazione risolvente può risultare:

a) $\Delta > 0$: la retta e la circonferenza, oppure le due circonferenze, sono secanti;

b) $\Delta = 0$: la retta e la circonferenza, oppure le due circonferenze, sono tangenti;

c) $\Delta < 0$: la retta e la circonferenza, oppure le due circonferenze, non hanno punti in comune.

Pertanto quando si devono determinare le equazioni delle rette tangenti a una circonferenza oppure di due circonferenze tangenti si impone che il discriminante dell'equazione risolvente il sistema sia nullo.

Esercitazioni proposte provare in Autocad

Esercitazione 1

Del quadrilatero $ABCD$ sono note le coordinate cartesiane ortogonali dei vertici, che si susseguono in senso antiorario: $A \equiv (0; +1\,246{,}28)$, $B \equiv (+3\,724{,}76; +1\,972{,}98)$, $C \equiv (+3\,224{,}18; +2\,784{,}56)$, $D \equiv (+381{,}32; +2\,219{,}94)$. I prolungamenti dei lati AD e BC si incontrano in un punto M. Calcolare:

A (X_A, Y_A)
B (X_B, Y_B)
C (X_C, Y_C)
D (X_D, Y_D)

- la misura dei lati e degli angoli interni del quadrilatero;
- l'area dei triangoli ABM e DCM;
- il raggio del cerchio circoscritto al triangolo DCM.

Disegno in scala 1 : 50 000.

RISPOSTE

$\overline{AB} = 3\,794{,}99$ m; $\overline{BC} = 953{,}54$ m; $\overline{CD} = 2\,898{,}39$ m; $\overline{DA} = 1\,045{,}67$;
$\widehat{A} = 63{,}970\,2$ gon; $\widehat{B} = 77{,}081\,8$ gon; $\widehat{C} = 122{,}703\,1$ gon; $\widehat{D} = 136{,}244\,9$ gon;
$S_{ABM} = 7\,117\,859{,}596$ m^2; $S_{CDM} = 4\,148\,161{,}040$ m^2;
$r = 1\,813{,}32$ m

Esercitazione 2

I vertici A, B, C, D di un quadrilatero si susseguono in senso orario; le coordinate cartesiane ortogonali dei vertici A, B, C, sono: $A \equiv (-77{,}42; -233{,}28)$, $B \equiv (+83{,}44; +157{,}96)$ e $C \equiv (+405{,}09; -78{,}77)$. Il vertice D è noto mediante le sue coordinate polari rispetto al vertice C e precisamente: $CD = 587{,}33$ m, $(CD) = 228°35'46''$. Calcolare:

- le coordinate cartesiane del vertice D;
- le lunghezze dei lati $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$;
- l'ampiezza degli angoli del quadrilatero;
- l'area del quadrilatero.

Disegno in scala 1 : 5 000.

RISPOSTE

$X_D = -35{,}45$ m; $Y_D = -467{,}21$ m;
$\widehat{A} = 147°28'43''$; $\widehat{B} = 75°59'50''$; $\widehat{C} = 77°45'23''$; $\widehat{D} = 58°46'04''$;
$\overline{AB} = 423{,}03$ m; $\overline{BC} = 399{,}37$ m; $\overline{DA} = 237{,}66$ m;
$S = 141\,637{,}854$ m^2

Esercitazione 3

Un terreno di forma triangolare ABC è stato rilevato misurando i lati $\overline{AB} = 115{,}50$ m e $\overline{AC} = 102{,}75$ m nonché l'angolo nel vertice A: $\alpha = 68{,}561\,9$ gon. Calcolare gli elementi incogniti dell'appezzamento e l'altezza CD relativa al lato AB. Disegno in scala 1 : 2 000.

RISPOSTE

$\overline{BC} = 112{,}46$ m;
$\widehat{B} = 52{,}403\,7$ gon; $\widehat{C} = 79{,}034\,4$ gon;
$\overline{CD} = 90{,}47$ m

Esercitazione 4

Del triangolo RST si conoscono i seguenti elementi: $\overline{TR} = 123{,}76$ m, $\overline{RS} = 111{,}48$ m, $\widehat{R} = \alpha = 74{,}728\,0$ gon. Calcolare gli elementi incogniti del triangolo e la misura della proiezione RV del lato TR sul lato RS. Disegno in scala 1 : 2 000.

RISPOSTE

$\overline{TS} = 130{,}67$ m;
$\widehat{T} = 57{,}649\,5$ gon; $\widehat{S} = 67{,}622\,5$ gon;
$\overline{RV} = 47{,}85$ m

Esercitazione 5

Su due allineamenti a e b aventi in comune il punto O sono state riportate rispettivamente le seguenti distanze: $\overline{OM} = 32{,}50$ m sull'allineamento a e $\overline{ON} = 54{,}20$ m sull'allineamento b.
È inoltre noto l'angolo formato dai due allineamenti: $\alpha = 38°22'52''$. Il segmento MN interseca la bisettrice dell'angolo α in un punto P. Determinare l'ampiezza dell'angolo $\widehat{M}$ e la distanza $\overline{MP}$. Disegno in scala 1 : 500.

RISPOSTE

$\widehat{M} = 106°31'47''$; $\overline{MP} = 13{,}16$ m

Esercitazione 6

Un raggio luminoso attraversa una lastra di vetro avente uno spessore di 2 cm; l'angolo di incidenza è $\widehat{i} = 32°$. Determinare l'angolo di rifrazione $\widehat{r}$ e la deviazione d fra il raggio incidente e quello emergente.

RISPOSTE

$\widehat{r} \approx 20°41'17''$; $d = 0{,}46$ cm

Esercitazione 7

Un appezzamento quadrilatero $ABCD$ è stato formato dall'unione di altri due: uno di forma triangolare ABC avente i lati di misura $\overline{AC} = 168{,}40$ m, $\overline{AB} = 184{,}32$ m e $\overline{BC} = 198{,}96$ m; l'altro pure triangolare BCD, ma rettangolo in D, avente l'ipotenusa formata dal lato BC e il cateto $\overline{BD} = 78{,}89$ m. Calcolare:

- la lunghezza del lato $\overline{CD}$;
- l'ampiezza degli angoli del quadrilatero;
- la distanza $\overline{AD}$;
- l'area di tutto l'appezzamento.

Disegno in scala 1 : 5 000.

RISPOSTE

$\overline{CD} = 182{,}65$ m;
$\widehat{A} = 76{,}116\,3$ gon; $\widehat{B} = 131{,}772\,4$ gon; $\widehat{C} = 92{,}111\,3$ gon;
$\overline{AD} = 232{,}63$ m;
$S = 21\,644{,}98$ m^2

Esercitazione 8

Di un quadrilatero $ABCD$ si sono misurati i lati $\overline{AB} = 38{,}78$ m, $\overline{AD} = 31{,}45$ m, $\overline{CD} = 15{,}12$ m e gli angoli $\widehat{BAD} = \alpha = 73°10'15''$ e $\widehat{ADC} = \delta = 81°31'58''$. Calcolare il restante lato BC, gli angoli rimanenti del quadrilatero e la sua area.
Disegno in scala 1 : 500.

RISPOSTE

$\overline{BC} = 28{,}55$ m;
$S = 693{,}595$ m^2;
$\widehat{C} = 149°23'06''$; $\widehat{B} = 55°54'41''$

Esercitazione 9

Di un punto A sono note le coordinate $X_A = 28{,}50$ m e $Y_A = 33{,}10$ m rispetto a un sistema di assi cartesiani ortogonali con origine nel punto O. Conoscendo la distanza $\overline{AB} = 42{,}85$ m e l'angolo $\widehat{OAB} = \alpha = 138°27'53''$, calcolare:

- l'area della superficie triangolare AOB;
- la distanza $\overline{OB}$;
- le coordinate cartesiane del punto B.

Disegno in scala 1 : 1 000.

RISPOSTE

$S = 620{,}54$ m^2;
$\overline{OB} = 80{,}91$ m;
$X_B = +27{,}90$ m; $Y_B = +75{,}95$ m

Esercitazione 10

A una base AB, i cui estremi hanno le coordinate $X_A = +237{,}19$ m, $Y_A = +954{,}35$ m, $X_B = +861{,}23$ m, $Y_B + 111{,}76$ m si appoggiano due triangoli, dei quali sono stati misurati gli angoli: $\widehat{CAB} = \alpha_1 = 69{,}562\,9$ gon, $\widehat{DAC} = \alpha_2 = 57{,}096\,4$ gon, $\widehat{ABC} = \beta = 78{,}640\,7$ gon, $\widehat{ACD} = \gamma_2 = 88{,}768\,4$ gon. Calcolare le coordinate dei vertici C e D. Disegno in scala 1 : 20 000.

RISPOSTE

$X_C = +1\,582{,}19$ m; $Y_C = +1\,170{,}53$ m;
$X_D = +1\,115{,}46$ m; $Y_D = +2\,507{,}82$ m

Esercitazione 11

Le coordinate ortogonali dei vertici di un appezzamento triangolare sono: $X_A = +61{,}34$ m, $Y_A = +90{,}05$ m, $X_B = +421{,}68$ m, $Y_B = -392{,}15$ m, $X_C = +733{,}08$ m, $Y_C = +92{,}15$ m.
Per il vertice B si conduce la parallela all'asse y che incontra il lato AC in un punto M. Calcolare le aree dei due triangoli nei quali detta parallela divide il triangolo dato e determinare le coordinate del punto M. Disegno in scala 1 : 10 000.

RISPOSTE

$X_M = +421{,}68$ m; $Y_M = 91{,}18$ m;
$S_{ABM} = 87\,081{,}25$ m^2; $S_{BCM} = 75\,254{,}20$ m^2

Esercitazione 12

Per collegare un punto C a un punto O, invisibile da C, si è tracciato da O un allineamento formante con l'asse delle y, passante per O, l'angolo $(OA) = 168{,}453\,1$ gon, sul quale è stato preso un punto A a una distanza $\overline{OA} = 206{,}70$ m.
Quindi dal punto A si è tracciato un altro allineamento AB formante con OA l'angolo $\widehat{OAB} = \alpha_1 = 288{,}708\,1$ gon e con lunghezza $\overline{AB} = 198{,}40$ m. Nei punti A e B si sono poi misurati gli angoli $\widehat{BAC} = \alpha_2 = 73{,}849\,3$ gon e $\widehat{CBA} = \beta = 64{,}495\,6$ gon.
Calcolare le coordinate del punto C rispetto al punto O come origine e all'asse y dato. Disegno in scala 1 : 2 000.

RISPOSTA

$X_C = -82{,}24$ m; $Y_C = -86{,}22$ m

Esercitazione 13

I punti A e B hanno per coordinate $X_A = +225{,}68$ m, $X_B = +771{,}31$ m, $Y_A = +627{,}15$ m, $Y_B = -68{,}24$ m. Facendo stazione in A e B con un goniometro vengono misurati gli angoli $\widehat{CAB} = \alpha = 102{,}362\,7$ gon, $\widehat{ABC} = \beta_1 = 42{,}765\,1$ gon, $\widehat{DAB} = \alpha_1 = 74{,}893\,7$ gon, $\widehat{ABD} = \beta = 86{,}311\,9$ gon. Calcolare la distanza $\overline{CD}$. Disegno in scala 1 : 10 000.

RISPOSTA

$\overline{CD} = 1\,394{,}17$ m

Esercitazione 14

Un appezzamento triangolare è stato rilevato misurando il lato $\overline{AB} = 213{,}42$ m e gli angoli adiacenti $\widehat{CAB} = \alpha = 113{,}426\,3$ gon e $\widehat{ABC} = \beta = 29{,}630\,9$ gon. I vertici si susseguono in senso antiorario.
Assumendo un sistema di assi con origine in A e l'asse delle y diretto positivamente verso C, determinare le coordinate cartesiane dei vertici dell'appezzamento, il raggio del cerchio inscritto al triangolo e le coordinate del suo centro O.
Disegno in scala 1 : 2 000.

RISPOSTE

$X_A = 0;\ Y_A = 0;$

$X_C = 0;\ Y_C = +122{,}82$ m;

$X_B = +206{,}69$ m; $Y_B = -44{,}68$ m

$r_i = 42{,}45$ m;

$X_O = +42{,}45$ m; $Y_O = +34{,}32$ m

Esercitazione 15

Dell'appezzamento quadrilatero $ABCD$ sono stati misurati i lati:

$\overline{AB} = 182{,}40$ m $\quad \overline{BC} = 126{,}44$ m $\quad \overline{CD} = 201{,}64$ m

e gli angoli destrorsi:

$\widehat{ABC} = \beta = 143{,}642\,5$ gon $\quad \widehat{BCD} = \gamma = 139{,}142\,7$ gon

Assumendo un sistema di assi cartesiani con origine in B e l'asse delle x coincidente con il lato BC, positivo verso C, calcolare:

- le coordinate dei vertici delle particella quadrilatera e quelle del punto E di intersezione delle diagonali;
- l'area della particella.

Disegno in scala 1 : 2 000.

RISPOSTE

$X_A = -115{,}48$ m; $Y_A = +141{,}19$ m;

$X_B = Y_B = 0;$

$X_C = +126{,}44$ m; $Y_C = 0;$

$X_D = +242{,}76$ m; $Y_D = +164{,}71$ m;

$X_E = +58{,}47$ m; $Y_E = +39{,}67$ m;

$S = 37\,060{,}55$ m^2

Esercitazione 16

Le coordinate di due punti A e B sono: $X_A = -250{,}33$ m, $Y_A = +398{,}71$ m, $X_B = +578{,}92$ m, $Y_B = +1\,020{,}50$ m. Sul prolungamento della direzione AB, dalla parte dell'estremo B, si trova un punto C che ha una distanza da B di 538,94 m. Dalle stazioni A e B si è osservato un punto P (che si trova a destra per un osservatore in A che guarda B) e sono stati misurati i due angoli orizzontali $\widehat{CAP} = \alpha = 64°15'$ e $\widehat{CBP} = \beta = 101°44'$.

Si domandano:

- le coordinate dei punti C e P;
- la lunghezza $\overline{OH}$ di asse delle ascisse compreso fra l'origine O e il punto H in cui esso è tagliato dalla CP.

Disegno in scala 1 : 10 000.
(Tema di abilitazione 1929)

RISPOSTE

$X_C = +1\,010{,}11$ m; $Y_C = +1\,343{,}81$ m;
$X_P = +1\,230{,}41$ m; $Y_P = -368{,}39$ m;
$\overline{OH} = 1\,183{,}01$ m

Esercitazione 17

Le coordinate rettangolari dei tre vertici A, B, C di un triangolo sono: $X_A = +275{,}20$ m, $Y_A = +372{,}20$ m, $X_B = +611{,}55$ m, $Y_B = +880{,}43$ m, $X_C = +989{,}54$ m, $Y_C = +110{,}04$ m. Sul lato BC, a una distanza di 435,10 da B, si fissa un punto P e per esso si conduce un allineamento perpendicolare a BC.
Calcolare le coordinate dei due punti D ed E in cui questo allineamento incontra le rette degli altri due lati CA e BA del triangolo. Disegno in scala 1 : 10 000.
(Tema di abilitazione 1931, 2ª sessione)

RISPOSTE

$X_D = +440{,}14$ m; $Y_D = +311{,}67$ m;
$X_E = +136{,}58$ m; $Y_E = +162{,}74$ m

Esercitazione 18

Un appezzamento quadrilatero $ABCD$ è stato rilevato misurando i lati $\overline{AB} = 1\,837{,}65$ m e $\overline{AC} = 2\,087{,}37$ m, la diagonale $\overline{BC} = 1\,865{,}69$ m e gli angoli in senso orario $\widehat{CAD} = \alpha_2 = 27{,}320\,8$ gon e $\widehat{DCB} = \gamma_2 = 23{,}635\,7$ gon. La bisettrice dell'angolo interno $\widehat{BCA}$ interseca il lato AB nel punto E. Calcolare:

- le lunghezze dei lati BD e CD;
- le ampiezze degli angoli del quadrilatero;
- l'area del quadrilatero;
- la distanza $\overline{AE}$;
- l'area del triangolo ACE.

Disegno in scala 1 : 20 000.

RISPOSTE

$\overline{BD} = 1\,089{,}71$ m; $\overline{CD} = 884{,}57$ m;
$\widehat{A} = 62{,}588\,8$ gon; $\widehat{B} = 95{,}265\,7$ gon; $\widehat{C} = 84{,}811\,6$ gon; $\widehat{D} = 157{,}333\,9$ gon;
$\overline{AE} = 970{,}35$ m;
$S_{ABCD} = 1\,895\,551{,}571$ m^2; $S_{ACE} = 842\,846{,}319$ m^2

Esercitazione 19

Una base PQ, interna a un appezzamento quadrilatero $ABCD$, presenta una lunghezza di 236,52 m. Facendo stazione in P con un goniometro a graduazione centesimale destrorsa, orientato secondo PQ, si sono collimati i vertici A, B, C, D, misurando gli angoli $\widehat{QPA} = 287{,}238\,4$ gon, $\widehat{QPB} = 361{,}048\,4$ gon, $\widehat{QPC} = 48{,}961\,8$ gon e $\widehat{QPD} = 140{,}120\,8$ gon. Successivamente si è fatta stazione nel punto Q e collimando nuovamente i vertici si sono misurati gli angoli $\widehat{PQA} = 51{,}361\,9$ gon, $\widehat{PQB} = 134{,}089\,6$ gon, $\widehat{PQC} = 294{,}743\,2$ gon e $\widehat{PQD} = 371{,}562\,9$ gon.
Assumendo un sistema di assi cartesiani con origine in P e asse delle x diretto positivamente verso Q, calcolare:

- le coordinate dei vertici;
- le lunghezze dei lati del quadrilatero;
- l'area dell'appezzamento.

Disegno in scala 1 : 5 000.

RISPOSTE

$X_A = -63{,}66$ m; $Y_A = +313{,}31$ m;
$X_B = +405{,}21$ m; $Y_B = +284{,}33$ m;
$X_C = +257{,}12$ m; $Y_C = -248{,}86$ m;
$X_D = -127{,}02$ m; $Y_D = -174{,}13$ m;
$\overline{AB} = 469{,}76$ m; $\overline{BC} = 553{,}37$ m; $\overline{CD} = 391{,}34$ m; $\overline{DA} = 491{,}54$ m;
$S = 223\,132{,}21$ m^2

Esercitazione 20

Di un appezzamento triangolare ABC sono noti i lati $\overline{AB} = 55{,}38$ m, $\overline{BC} = 48{,}22$ m e $\overline{AC} = 57{,}90$ m. Calcolare:

- l'ampiezza degli angoli interni;
- la lunghezza del raggio del cerchio circoscritto;
- la lunghezza del raggio del cerchio ex-inscritto relativo al lato AB.

Disegno in scala 1 : 500.

RISPOSTE

$\widehat{A} = 55{,}917\,7$ gon; $\widehat{B} = 75{,}053\,6$ gon; $\widehat{C} = 69{,}028\,7$ gon;
$r_c = 31{,}32$ m; $r_e = 40{,}64$ m